綜合證題法

一. 垂直平分線(中垂線)性質:

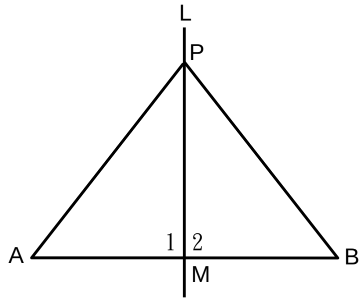
一線段垂直平分線上的任一點，到此線段的兩端點等距離。

【範例】試證垂直平分線到線段的兩端點等距離。

【已知】L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，交 $\overline{AB}$ 於 M，且 P 為 L 上的點。

【求證】$\overline{PA}=\overline{PB}$

【證明】



∵L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線且交 $\overline{AB}$ 於 M

∴ $\angle 1=\angle 2=90^{0}$ 且 $\overline{AM}=\overline{BM}$

在 ΔAMP 與 ΔBMP 中

∵ $\angle 1=\angle 2$，$\overline{AM}=\overline{BM}$ 、$\overline{PM}=\overline{PM}$

∴ $\Delta AMP\cong\Delta BMP$ (SAS) 則 $\overline{PA}=\overline{PB}$

二. 垂直平分線的判別性質:

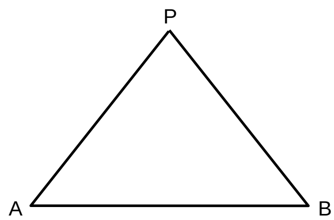
與線段兩端點等距離的點，必在它的垂直平分線上。

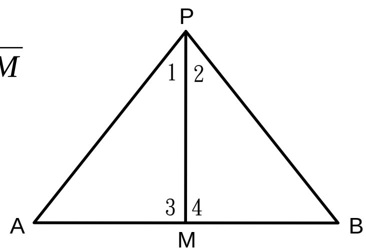
【範例】試證與線段兩端點等距離的點，必在它的垂直平分線上。

【已知】$\overline{PA}=\overline{PB}$

【求證】P 在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

【證明】





作∠APB 的角平分線交 $\overline{AB}$ 於 M，則 $\angle 1=\angle 2$

在 ΔAPM 與 ΔBPM 中 ∵ $\overline{PA}=\overline{PB}$ 、$\angle 1=\angle 2$、$\overline{PM}=\overline{PM}$

∴ $\Delta APM\cong\Delta BPM$ (SAS) 則 $\overline{AM}=\overline{BM}$，$\angle 3=\angle 4$

又∵ $\angle 3+\angle 4=180^{0}$ ∴ $\angle 3=\angle 4=90^{0}\Rightarrow\overline{PM}\perp\overline{AB}$

∵ $\overline{AM}=\overline{BM}$ 且 $\overline{PM}\perp\overline{AB}$

∴ $\overline{PM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$，即 P 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

三. 角平分線性質:

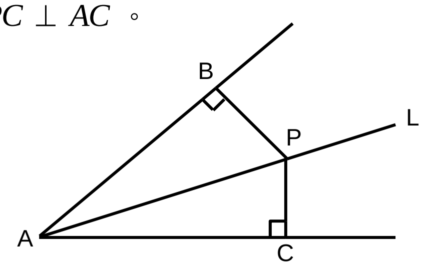
一個角的角平分線上任一點，到角的兩邊等距離。

【範例】試證角平分線上任意一點到此角兩邊等距離。

【已知】L 為∠BAC 的平分線，P 點在 L 上，且 $\overline{PB}\perp\overline{AB}$，$\overline{PC}\perp\overline{AC}$。

【求證】$\overline{PB}=\overline{PC}$

【證明】



在 ΔABP 與 ΔACP 中，

∵∠BAP＝∠CAP，∠ABP＝∠ACP＝90^{0}，

$\overline{AP}=\overline{AP}$

所以由 AAS 可知 ΔABP≅ΔACP　故得 $\overline{PB}=\overline{PC}$

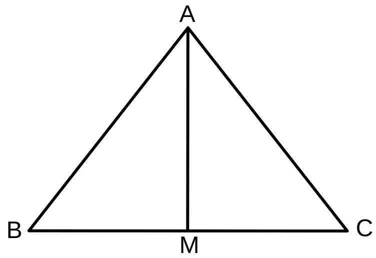
四. 等腰三角形的重要性質:

(1)等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊。

【範例】試證等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊。

【已知】在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{AM}$ 平分∠A。

【求證】$\overline{BM}=\overline{CM}$ 且 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$ 。



【證明】

∵ $\overline{AM}$ 平分 $\angle A$ ∴∠BAM＝∠CAM，

在△ABM 與△ACM 中

∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$ ，∠BAM＝∠CAM，$\overline{AM}=\overline{AM}$

∴△ABM≅△ACM（SAS）

因此 $\overline{BM}=\overline{CM}$ ，∠AMB＝∠AMC

又∵∠AMB＋∠AMC＝180^0

∴∠AMB＝∠AMC＝90^0 故得 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$

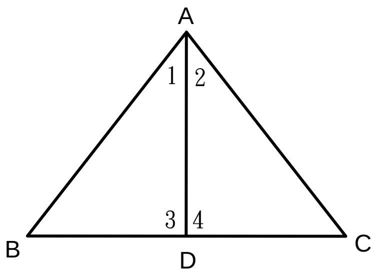
(2)等腰三角形底邊上的中線必垂直底邊且平分其頂點。

【範例】試證等腰三角形底邊上的中線必垂直底邊且平分其頂點。

【已知】若 ΔABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{BD}=\overline{CD}$ 。

【求證】$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 且∠1＝∠2

【證明】



在 ΔABD 與 ΔACD 中

∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$ ，$\overline{BD}=\overline{CD}$ ，$\overline{AD}=\overline{AD}$

∴△ABD≅△ACD（SSS）

則∠1＝∠2、∠3＝∠4

又∵∠3＋∠4＝180^0

∴∠3＝∠4＝90^0

即 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$

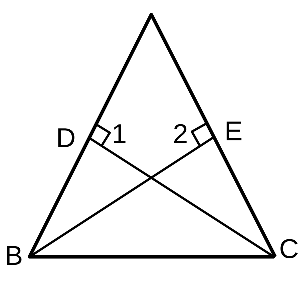
(3)等腰三角形兩腰上的高相等。

【範例】等腰三角形兩腰上的高相等

【已知】ΔABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$ ，且 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ ，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ 。

【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$ 。

【證明】



在 ΔABE 與 ΔACD 中

∵ $\angle 1=\angle 2$ 、$\angle A=\angle A$ 、$\overline{AB}=\overline{AC}$

∴ $\Delta ABE\cong\Delta ACD$（AAS）

故 $\overline{BE}=\overline{CD}$

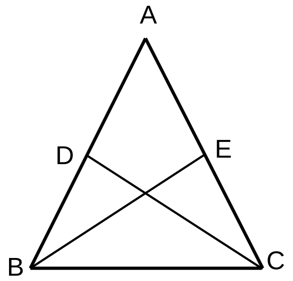
(4)等腰三角形兩腰上的中線相等。

【範例】試證等腰三角形兩腰上的中線相等。

【已知】$\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{AD}=\overline{BD}$、$\overline{AE}=\overline{CE}$

【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$

【證明】



$\because \overline{AB}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BD}$、$\overline{AE}=\overline{CE}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{BD}=\overline{AE}=\overline{CE}$

在 ΔBDC 與 ΔCEB 中

$\because \overline{BD}=\overline{CE}$、$\overline{BC}=\overline{BC}$，$\angle ABC=\angle ACB$

$\therefore \Delta BDC\cong\Delta CEB$（SAS）

則 $\overline{BE}=\overline{CD}$

【範例】試證平行四邊形的任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等的三角形。

【已知】ABCD 為平行四邊形，$\overline{AC}$ 為對角線。

【求證】$\Delta ABC\cong\Delta CDA$。

【證明】

(1) ∵ABCD 為平行四邊形 $\therefore \overline{AB}//\overline{DC}$，$\overline{AD}//\overline{BC}$。

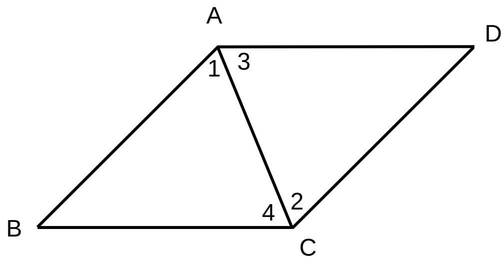
(2) $\because \overline{AB}//\overline{DC}$ $\therefore \angle 1=\angle 2$。

(3) $\because \overline{AD}//\overline{BC}$ $\therefore \angle 3=\angle 4$。

(4) 在 ΔABC 與 ΔCDA 中，

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\overline{AC}=\overline{AC}$

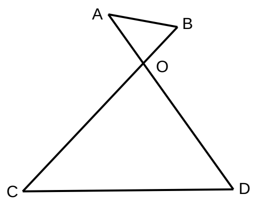
$\therefore \Delta ABC\cong\Delta CDA$（ASA 全等性質



小 試 身 手

【範例一】

如附圖 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 O 點，甲、乙兩人要證明∠A ＋∠B ＝∠D ＋∠C，證法如下，



甲：作一圓通過 A、B、C、D 四點

∵∠A 與∠C 對圓弧$\overset{\frown}{BD}$，

∴ ∠A ＝∠C，∠B ＝∠D

∴∠A ＋∠B ＝∠C ＋∠D

乙：∵∠BOD 是△AOB 和△DOC 的外角

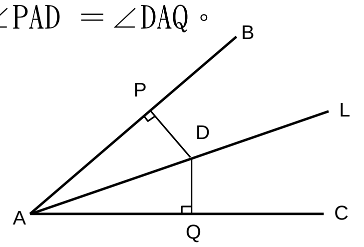
∴∠BOD ＝∠A＋∠B ＝∠C ＋∠D

聰明的你，判斷甲、乙兩人的證法，誰正確

【練習一】

如附圖，∠APD ＝∠AQD ＝90^0，$\overline{PD}=\overline{QD}$。

求證：∠PAD ＝∠DAQ。



證明：∵∠APD＝∠AQD＝90^0（已知）

_______（已知）

$\overline{AD}=\overline{AD}$（共同邊）

∴△PAD≅△QAD（_______全等性質）

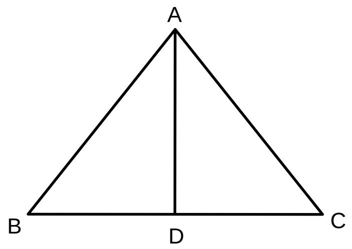
∴∠PAD＝∠DAQ（對應角相等）

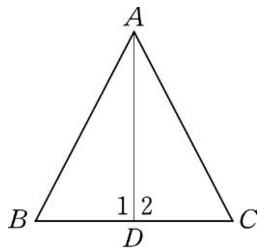
答案：$\overline{PD}=\overline{QD}$，RHS

？答：______。
解答:
乙正確
甲不一定正確（因為 A、B、C、D 四點不一定共圓）

【範例二】
【已知】如附圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$ 、$\overline{BD}=\overline{CD}$
【求證】$\overline{AD}\perp\overline{BC}$
【證明】

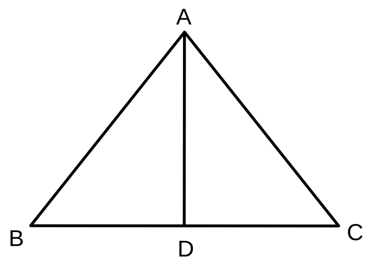
△ABD 與△ACD 中
$\overline{AB}=\overline{AC}$（已知）
$\overline{BD}=\overline{CD}$（已知）
$\overline{AD}=\overline{AD}$（公共邊）
∴△ABD≅△ACD(SSS)
故∠1＝∠2（對應角相等）
∵∠1＋∠2＝180^0（一直線等於一平角）
∴∠1＝90^0＝∠2
故 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$





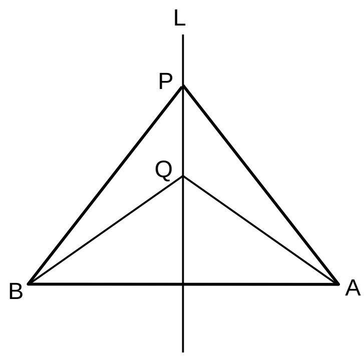
【練習二】
【已知】如附圖，$\triangle ABC$ 中，∠B＝∠C， $\overline{AD}$ 為∠BAC 的平分線
【求證】△ABD≅△ACD
【證明】

∵ $\overline{AD}$ 平分 $\angle A$ ∴∠BAD＝∠CAD，
在ΔABD 與ΔACD 中
∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$ ，∠BAD＝∠CAD，$\overline{AD}=\overline{AD}$
∴ΔABD≅ΔACD（SAS）
故得證



【範例三】
【已知】L 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，P、Q 在 L 上
【求證】△APQ≅△BPQ
【證明】

在△APQ及△BPQ中，
∵P、Q在 $\overline{AB}$ 的中垂線L上，
∴ $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，$\overline{QA}=\overline{QB}$ ，又 $\overline{PQ}=\overline{PQ}$ ，
故△APQ≅△BPQ(SSS全等性質)

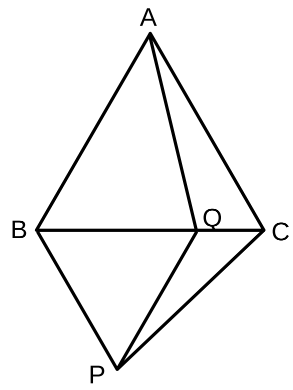


【練習三】

【已知】△ABC 與△BPQ 都是正三角形

【求證】$\overline{AQ}=\overline{CP}$

【證明】



∵△ABC與△BPQ都是正三角形

∴$\overline{AB}=\overline{CB}$，$\overline{BQ}=\overline{BP}$

∠ABQ＝∠CBP＝60^0

∴△ABQ≅△CBP(SAS全等性質)

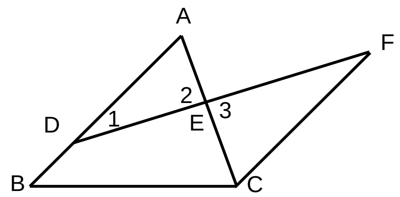
∴$\overline{AQ}=\overline{CP}$(對應邊相等)

【範例四】

【已知】如圖，D 為$\overline{AB}$上一點，$\overline{DF}$交$\overline{AC}$於 E，$\overline{DE}=\overline{EF}$，$\overline{FC}//\overline{AB}$。

【求證】$\overline{AE}=\overline{CE}$

【證明】



∵$\overline{FC}//\overline{AB}$ ∴∠1＝∠F

在△ADE與△CFE中

∵∠1＝∠F，∠2＝∠3(對頂角)

$\overline{DE}=\overline{EF}$(已知)

∴△ADE≅△CFE(ASA全等)

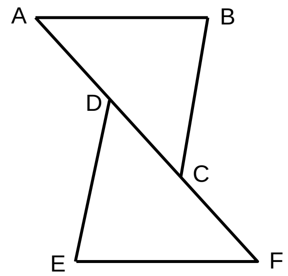
故$\overline{AE}=\overline{CE}$

【練習四】

【已知】$\overline{AB}//\overline{EF}$，$\overline{AD}=\overline{CF}$，∠B＝∠E

【求證】$\overline{AB}=\overline{EF}$

【證明】



∵$\overline{AB}//\overline{EF}$ ∴∠A＝∠F(內錯角相等)，∵$\overline{AD}=\overline{CF}$

∴$\overline{AD}+\overline{CD}=\overline{CF}+\overline{CD}$，即$\overline{AC}=\overline{DF}$

在△ABC與△FED中，

∵∠A＝∠F，∠B＝∠E(已知)，$\overline{AC}=\overline{DF}$

∴△ABC≅△FED(AAS全等性質)

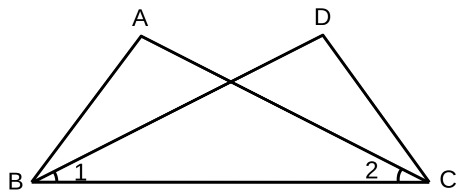
故$\overline{AB}=\overline{EF}$

【範例五】

【已知】∠ABC＝∠DCB，∠1＝∠2

【求證】$\overline{BD}=\overline{AC}$

【證明】



∵∠1＝∠2，∠ABC＝∠DCB(已知)

$\overline{BC}=\overline{BC}$(已知)

∴△ABC≅△DCB(ASA全等)

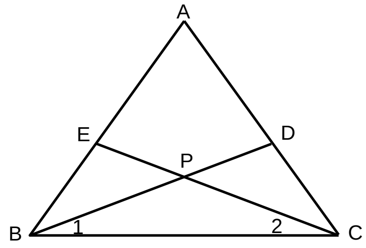
故$\overline{BD}=\overline{AC}$

【練習五】

【已知】$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle 1=\angle 2$

【求證】$\overline{BD}=\overline{CE}$

【證明】



在△ABC 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$ $\quad\therefore \angle ABC=\angle ACB$

在△EBC 與△DCB 中，

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle ABC=\angle ACB$，$\overline{BC}=\overline{BC}$

$\therefore$△EBC≅△DCB(ASA 全等性質)

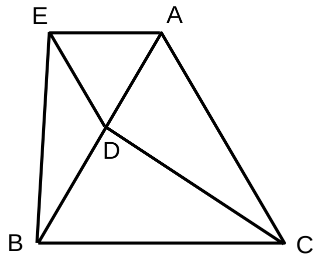
$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{CE}$

【範例六】

【已知】△ABC 與△ADE 皆為正三角形

【求證】$\overline{BE}=\overline{CD}$

【證明】



$\because$△ABC 與△ADE 都是正三角形

$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{EA}=\overline{AD}$

$\angle EAB=\angle DAC=60^0$

$\therefore$△EAB≅△DAC(SAS 全等性質)

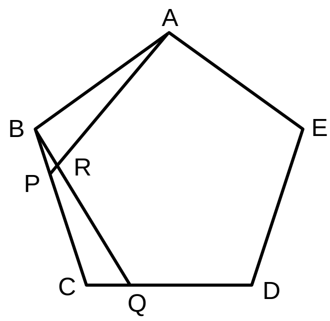
$\therefore \overline{EB}=\overline{CD}$(對應邊相等)

【練習六】

【已知】ABCDE 為正五邊形，$\overline{BP}=\overline{CQ}$

【求證】$\overline{AP}=\overline{BQ}$

【證明】



△ABP 與△BCQ 中

$\because$ABCDE 為正五邊形

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}$

$\angle ABP=\angle BCQ=\dfrac{(5-2)\times 180^0}{5}=108^0$

$\overline{BP}=\overline{CQ}$

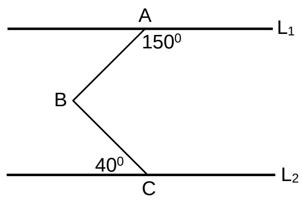
$\therefore$△ABP≅△BCQ(SAS 全等性質)

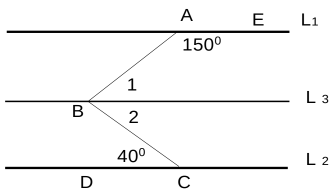
$\therefore \overline{AP}=\overline{BQ}$(對應邊相等)

【範例七】

如圖，L_1 // L_2，求證$\angle ABC=70$ 度

【證明】





過 B 點作 L_3 // L_1 $\Rightarrow$ L_3 // L_2

$\because L_1$ // L_3 $\therefore \angle EAB+\angle 1=180^0$（同側內角互補）

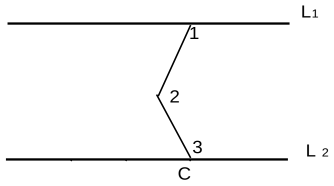
$\Rightarrow \angle 1=180^0-150^0=30^0$

$\because L_3$ // L_2 $\therefore \angle BCD=\angle 2$（內錯角相等）

$\Rightarrow \angle 2=40^0$

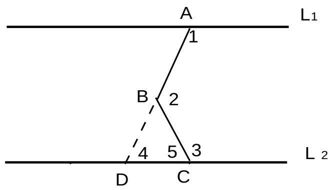
$\angle ABC=\angle 1+\angle 2=30^0+40^0=70^0$

【練習七】



如圖，L_1 // L_2，若$\angle 1=100^0$，$\angle 2=150^0$，求證$\angle 3=110$度

【證明】



作$\overrightarrow{AB}$交L_2於D點

$\because L_1$ // L_2　　$\therefore \angle 1+\angle 4=180^0$（同側內角互補）

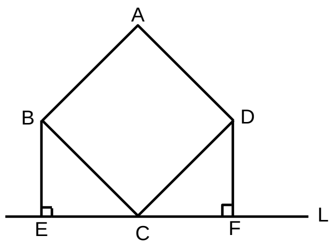
$\Rightarrow \angle 4=180^0-100^0=80^0$

由$\triangle$BDC中$\angle 2=\angle 4+\angle 5$

$=80^0+180^0-\angle 3$

$\Rightarrow \angle 3=110^0$

【範例八】



【已知】過正方形ABCD之C點，作一直線L，分別過B、D點作$\overline{BE}\perp L$、$\overline{DF}\perp L$。

【求證】$\overline{EF}=\overline{DF}+\overline{BE}$

【證明】

$\because$四邊形ABCD為正方形$\therefore \angle BCD=90^0$且$\overline{BC}=\overline{CD}$

$\because \overline{BE}\perp L$、$\overline{DF}\perp L$ $\therefore \angle BEC=90^0$，$\angle DFC=90^0$

$\because$E、C、F三點共線$\therefore \angle BCE+\angle BCD+\angle DCF=180^0$

$\Rightarrow \angle BCE+90^0+\angle DCF=180^0$

$\Rightarrow \angle DCF=90^0-\angle BCE$

由$\triangle$BEC中$\angle EBC+\angle BCE+\angle CEB=180^0$（三角形內角和$=180^0$）

$\Rightarrow \angle EBC=90^0-\angle BCE$

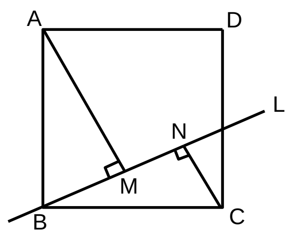
$\because \overline{BC}=\overline{CD}$、$\angle BEC=90^0=\angle DFC$、$\angle DCF=\angle ECB$

$\therefore \triangle CEB\cong\triangle DFC$(AAS全等性質)

$\Rightarrow \overline{BE}=\overline{CF}$、$\overline{EC}=\overline{DF}$

$\Rightarrow \overline{EF}=\overline{CF}+\overline{EC}=\overline{DF}+\overline{BE}$

【練習八】



【已知】直線L通過正方形ABCD的頂點B，$\overline{AM}\perp L$，$\overline{CN}\perp L$

【求證】$\overline{AM}=\overline{BN}$

【證明】

$\because \overline{AM}\perp L$，$\overline{CN}\perp L$ $\therefore \angle AMB=90^0$，$\angle BNC=90^0$

$\because$四邊形ABCD為正方形$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}$；$\angle ABC=90^0$

$\Rightarrow \angle NBC=90^0-\angle ABM$

由$\triangle$ABM中$\angle ABM+\angle BMA+\angle MAB=180^0$（三角形內角和$=180^0$）

$\Rightarrow \angle MAB=90^0-\angle ABM$

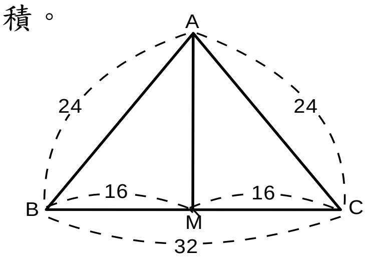
$\because \overline{AB}=\overline{BC}$、$\angle NBC=\angle MAB$、$\angle AMB=90^0=\angle BNC$

$\Rightarrow \therefore \triangle AMB\cong\triangle BNC$(AAS全等性質)

$\Rightarrow \overline{AM}=\overline{BN}$（對應邊相等）

【範例九】

三角形 ABC 三邊長分別為 24 公分、24 公分、32 公分，試求其面積。



【解】

作 $\overline{AM}$ 為 $\angle$A 角平分線

$\because \Delta$ABC 為等腰三角形 $\therefore \overline{AM}$ 垂直平分 $\overline{BC}$

$\Rightarrow \Delta$ABM 為直角三角形

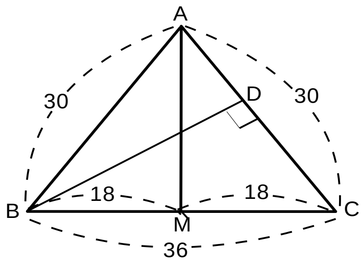
由商高定理 $\Rightarrow \overline{AM}=\sqrt{24^2-16^2}=\sqrt{320}=8\sqrt{5}$

ΔABC 之面積 $=\frac{1}{2}\times 32\times 8\sqrt{5}=128\sqrt{5}$

【練習九】

△ABC 中，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=30$ 公分，$\overline{BC}=36$ 公分，試求△ABC 一腰上的高為多少？

【解】



作 $\overline{AM}$ 為 $\angle$A 角平分線

$\because \Delta$ABC 為等腰三角形 $\therefore \overline{AM}$ 垂直平分 $\overline{BC}$

$\Rightarrow \Delta$ABM 為直角三角形

由商高定理 $\Rightarrow \overline{AM}^2=30^2-18^2$

$\Rightarrow \overline{AM}=24$

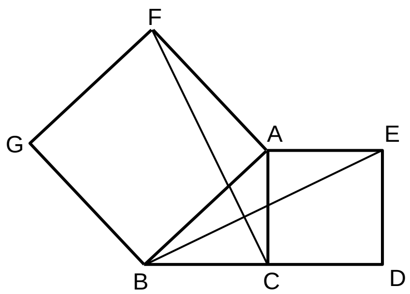
ΔABC 之面積 $=\frac{1}{2}\times 36\times 24=432$（平方公分）

$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times 30 \Rightarrow \overline{BD}=\frac{432}{15}$（腰上的高）

【範例十】

如圖，以△ABC 的兩邊 $\overline{AB},\overline{AC}$ 為邊，作正方形 ABGF、ACDE，求證：$\overline{BE}=\overline{CF}$

【證明】



$\because$ 四邊形 ABGF、四邊形 ACDE 為正方形

$\therefore \overline{AF}=\overline{AB}$、$\angle$FAB$=90^0=\angle$EAC

$\overline{AC}=\overline{AE}$

在 ΔAFC 與 ΔABE 中

$\because \overline{AF}=\overline{AB}$、$\angle$FAC$=90^0+\angle$BAC$=\angle$BAE

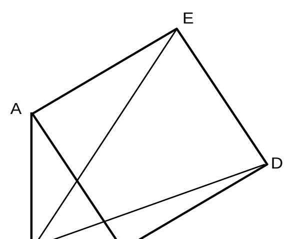
$\overline{AC}=\overline{AE}$

$\therefore$△AFC≅△ABE(SAS 全等性質）　$\Rightarrow \overline{BE}=\overline{CF}$

【練習十】

如圖，△ABC 中，　$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，ACDE 為正方形，求：

（1）$\overline{BD}=$？（2）$\overline{BE}=$？



【證明】作△ABC≅ △EKA≅△CHD

$\Rightarrow \overline{AB}=4=\overline{EK}=\overline{CH}$

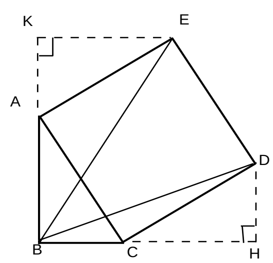
$\Rightarrow \overline{BC}=3=\overline{AK}=\overline{DH}$

△BKE、△DBH 為直角三角形

由商高定理

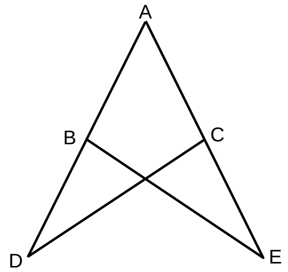
$\Rightarrow \overline{BD}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{DH}^2}=\sqrt{(3+4)^2+3^2}=\sqrt{58}$

$\Rightarrow \overline{BE}=\sqrt{\overline{BK}^2+\overline{KE}^2}=\sqrt{(3+4)^2+4^2}=\sqrt{65}$



【範例十一】

如圖，已知$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{AE}$，求證∠ABE＝∠ACD



【證明】

在△ABE與△ACD中，

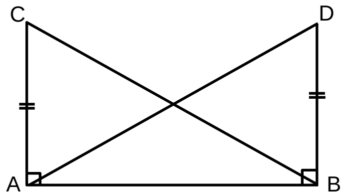
∵$\overline{AB}=\overline{AC}$，∠A＝∠A，$\overline{AE}=\overline{AD}$

∴由SAS可知△ABE≅△ACD

因此 ∠ABE＝∠ACD

【範例十二】

如圖，已知$\overline{CA}\perp\overline{AB}$，$\overline{DB}\perp\overline{AB}$，$\overline{CA}=\overline{DB}$，求證$\overline{CB}=\overline{DA}$



【證明】

在△CAB與△DBA中，

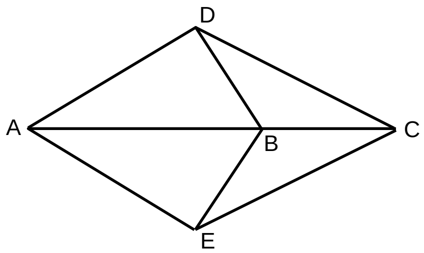
∵$\overline{CA}=\overline{DB}$，∠CAB＝∠DBA＝$90^0$，$\overline{AB}=\overline{AB}$，

∴由SAS可知△CAB≅△DBA

因此 $\overline{CB}=\overline{DA}$

【範例十三】

如圖，已知$\overline{AD}=\overline{AE}$，$\overline{BD}=\overline{BE}$，C點在$\overleftrightarrow{AB}$上，求證$\overline{CD}=\overline{CE}$



【證明】

在△ABD與△ABE中，

∵$\overline{AD}=\overline{AE}$，$\overline{BD}=\overline{BE}$，$\overline{AB}=\overline{AB}$，

∴由SSS可知△ABD≅△ABE

因此∠DAB＝∠EAB

即∠DAC＝∠EAC

在△ACD與△ACE中，

∵$\overline{AD}=\overline{AE}$，∠DAC＝∠EAC，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

由SAS可知△ACD≅△ACE

故得 $\overline{CD}=\overline{CE}$。