

■ 平行尺規作圖

在前面的作圖，都是有關垂直的作圖部分，但在幾何學中我們亦常用到平行的觀念及性質，所以我們接著來介紹如何畫平行線的尺規作圖。

平行尺規作圖：給定任一直線及線外一點，作出過此點且與此直線平行的直線。

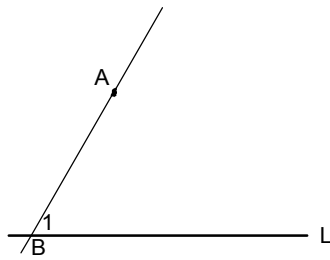
A .

【已知】直線 L 與線外一點 A。

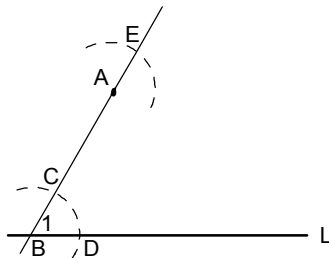
【求作】過 A 點作一平行線 M 與 L 平行。

【作法一】步驟一：過線外一點 A 隨意畫與 L 交錯之直線，

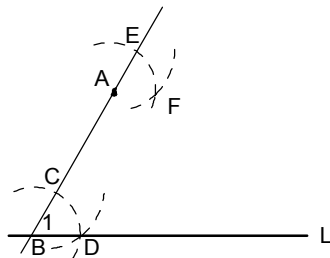
交直線 L 於 A 點，所設成的角為 $\angle 1$ 。



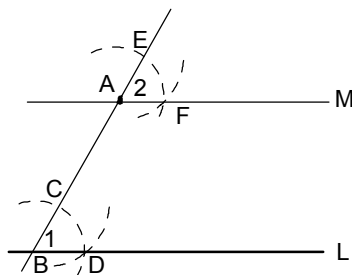
步驟二：分別以 A、B 為圓心，相同長度為半徑畫弧，交點分別為 C、D、E。



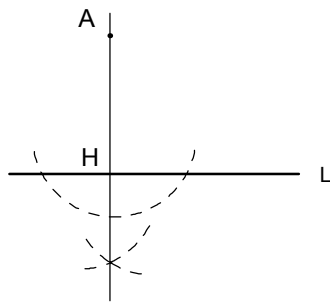
步驟三：以 E 為圓心， \overline{CD} 為半徑畫弧，交點為 F 點。



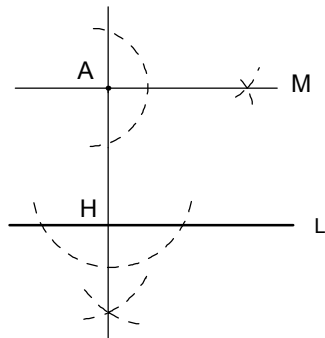
步驟四：連接 \overline{AF} 線段即為所求。



【作法二】 步驟一：過 A 點作 $AH \perp L$ 。



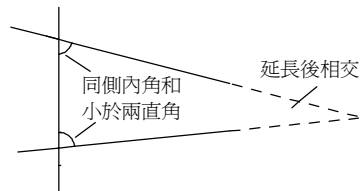
步驟二：過 A 點作直線 M 垂直 AH ，則 $M \parallel L$ 。



■ 平行線性質與應用

古希臘的幾何，也就是歐幾里德的幾何是由公設所建立，其中公設五是很重要的，此公設又稱之為平行公設，是有關平行的幾何。

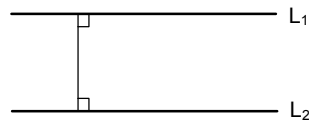
【公設五】若一直線和兩直線相交，且其中一側的同側內角和小於兩直角，則將此兩直線延長後，會交於同側內角和小於二直角的一側。



平行線的定義與性質

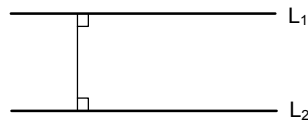
平行線的定義：

由【公設五】我們給定兩直線將平行的定義。在平面的兩條直線，若有一直線能同時垂直於這兩條直線，就說這兩條直線互相平行。且平行的兩條直線永不相交。如下圖，直線 L_1 與 L_2 平行，記作 $L_1 \parallel L_2$ ，讀作「 L_1 平行於 L_2 」。

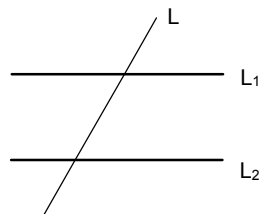


平行觀念：

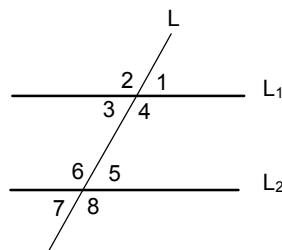
- (1) 兩平行線之間保持相同的距離，且無限延伸後沒有交點。
- (2) 一線段若垂直於平行線中的一條直線，必垂直於平行線中的另一條直線。



截線：在一平面上，直線 L 分別與直線 L_1 與 L_2 相交於不同兩點時，則 L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。如下圖， L 叫做 L_1 與 L_2 的截線。

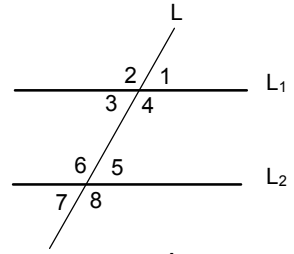


截角：直線 L 為 L_1 與 L_2 的截線，形成 8 個截角，如下圖。



(1)同位角相等：

$\angle 1$ 在 L_1 的右上方， $\angle 5$ 在 L_2 的右上方，位置相同都在右上方，故稱 $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 為同位角，同理， $\angle 4$ 與 $\angle 8$ 、 $\angle 2$ 與 $\angle 6$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 7$ 都是同位角。在此我們可知：
 $\angle 1 = \angle 5$ ； $\angle 4 = \angle 8$ ； $\angle 2 = \angle 6$ ； $\angle 3 = \angle 7$ 。



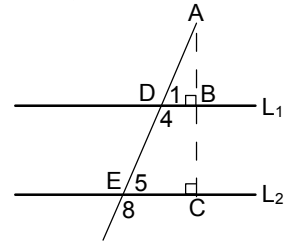
【證明】如右圖，做 \overline{AC} 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2 。

在 $\triangle ADB$ 與 $\triangle AEC$ 中， $\angle B = \angle C$ 皆為直角，且 $\angle BAD = \angle CAE$ 。

在 $\triangle ADB$ 中， $\angle A + \angle B + \angle 1 = 180^\circ$ (三角形內角和 180°)。

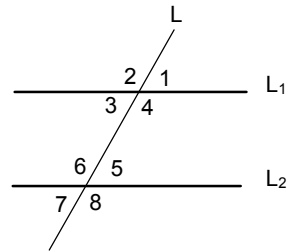
在 $\triangle AEC$ 中， $\angle A + \angle C + \angle 5 = 180^\circ$ (三角形內角和 180°)。

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 5$ ，故同位角相等。



(2)內錯角相等：

$\angle 5$ 與 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 與 $\angle 6$ ，都在 L_1 與 L_2 的內側，但交錯在 L 的兩邊，故稱為內錯角，在此我們可知 $\angle 3 = \angle 5$ ； $\angle 4 = \angle 6$ 。



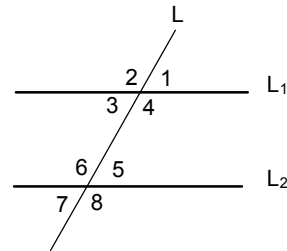
【證明】如右圖， $\because \angle 1 = \angle 3$ (對頂角相等)

又 $\odot \angle 1 = \angle 5$ (同位角相等)

$\therefore \angle 3 = \angle 5$ ，故內錯角相等。

(3)同側內角互補：

$\angle 5$ 與 $\angle 4$ 都在 L_1 與 L_2 的內側，且在 L 的同一側，故稱為同側內角；同理， $\angle 3$ 與 $\angle 6$ 也為同側內角。在此我們可知 $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ ； $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ 。



【證明一】 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$

$\because \angle 1 = \angle 5$ (同位角相等)

$\therefore \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

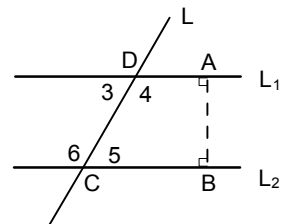
【證明二】如右圖，做 \overline{AB} 線段，同時垂直於 L_1 與 L_2 。

\because 四邊形 $ABCD$ 內角和為 360°

$\therefore \angle A + \angle B + \angle 5 + \angle 4 = 360^\circ$

$\Rightarrow \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ ，

故同側內角互補。



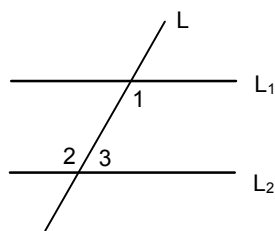
【範例】如圖， $L_1 \parallel L_2$ ， L 是 L_1 與 L_2 的一條截線， $\angle 1 = 55^\circ$ ，求 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ ？

【解說】 $\because L_1 \parallel L_2$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 55^\circ \text{ (內錯角相等)}$$

$$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

$$\angle 3 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

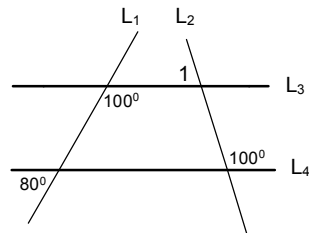


【範例】(1) 如附圖，直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 中，互相平行的有_____。

(2) 其中 $\angle 1 =$ _____。

【解說】(1) $L_3 \parallel L_4$ (\because 同側內角互補)

$$(2) \angle 1 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$



【範例】設 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的兩邊互相平行，若 $\angle A = 65^\circ$ ，求 $\angle B =$ ？

【解說】

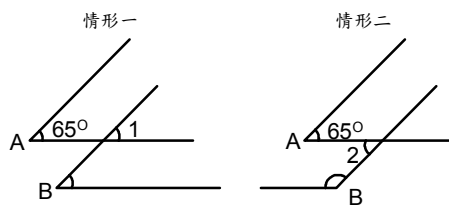
可能有兩種情形(如右圖)：

$$(1) \angle 1 = \angle A = 65^\circ \text{ (同位角相等)},$$

$$\angle B = \angle 1 = 65^\circ \text{ (同位角相等)}$$

$$(2) \angle 2 = \angle A = 65^\circ \text{ (內錯角相等)}$$

$$\angle B = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \text{ (同側內角互補)}$$

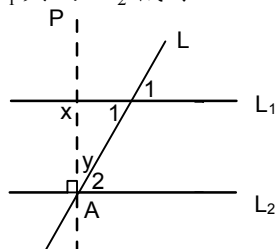


平行線的判別：

在前面我們知道， $L_1 \parallel L_2$ ， L 為 L_1 與 L_2 的截線，則有同位角相等、內錯角相等及同側內角互補的性質，那反過來假設 L_1 與 L_2 被一直線所截，則此三性質是否也可推得 $L_1 \parallel L_2$ ？

(1) 兩條直線被一直線所截，若截出的同位角相等，則此兩直線平行。

如下圖，若 L 為 L_1 與 L_2 截線，且 $\angle 1 = \angle 2$



【證明】過 A 點作直線 P ，使 $P \perp L_2$ 於 A 。

$$\Rightarrow \angle 2 + \angle y = 90^\circ \dots \textcircled{1}$$

$$\angle 1 + \angle y = 180^\circ - x \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \angle 1 - \angle 2 = 90^\circ - x$$

$$\because \angle 1 = \angle 2 \text{ (同位角相等)}。$$

$$\therefore x = 90^\circ, \text{ 故 } L_1 \parallel L_2。$$

(2) 兩條直線被一直線所截，若截出的內錯角相等，則此兩直線平行。

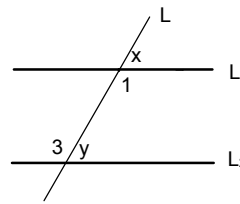
如下圖，若 L 為 L_1 與的 L_2 截線，且 $\angle 1 = \angle 3$

【證明】 $\angle x + \angle 1 = 180^\circ$

$\angle 3 + \angle y = 180^\circ$

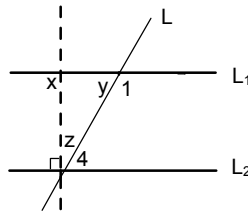
$\Rightarrow \angle x = \angle y$

By(1)故 $L_1 // L_2$ 。



(3) 兩條直線被一直線所截，若截出的同側內角互補，則此兩直線平行。

如下圖，若 L 為 L_1 與的 L_2 截線，且 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$



【證明】 $\angle y + \angle 1 = 180^\circ \dots \textcircled{1}$

$\angle z + \angle 4 = 90^\circ \dots \textcircled{2}$

$\angle x = \angle y + \angle z$ (外角定理) $\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$

$\Rightarrow (\angle y + \angle 1) + (\angle z + \angle 4) + \angle x = 180^\circ + 90^\circ + (\angle y + \angle z)$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 4 + \angle x = 270^\circ$

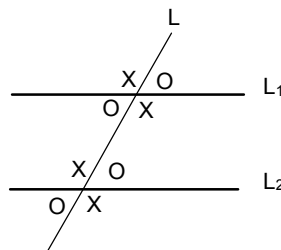
$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180$

$\therefore x = 90^\circ$ ，故 $L_1 // L_2$ 。

【結論】 若兩平行線被一直線所截，則(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補。

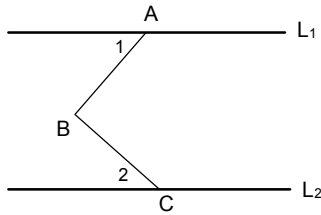
若兩條直線被一直線所截若(1)同位角相等；(2)內錯角相等；(3)同側內角互補，三者其中一個成立，則此兩直線平行。

若兩條平行線被截線所截時，形成的八個角，角度只有兩種，如圖所示。

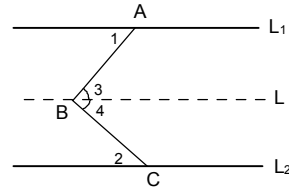


平行線性質的應用：對於平行線，除了常用平行線性質：(1)同位角相等；(2)內錯角相等；
(3)同側內角互補，我們將介紹幾個相關延伸性質。

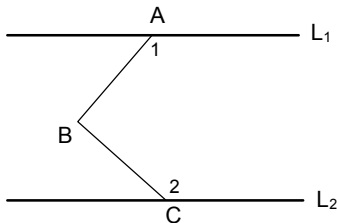
1. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$



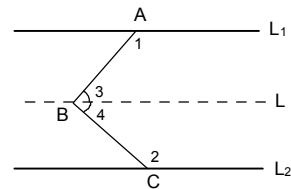
【證明】過 B 點作 L 平行 L_1 ，
 $\because L_1 \parallel L_2 \therefore L \parallel L_2$
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$ (內錯角相等)
 故 $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ 。



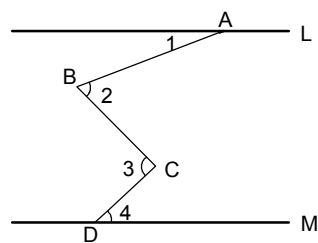
2. 若 $L_1 \parallel L_2$ ，則 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 360^\circ$



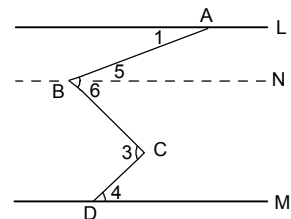
【證明】過 B 點作 L 平行 L_1 ，
 $\because L_1 \parallel L_2 \therefore L \parallel L_2$
 $\Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ ，
 $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (同側內角互補)
 故 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$



3. 如右圖，若 $L \parallel M$ ，則 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ 。

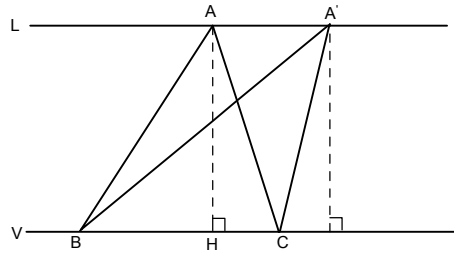


【證明】過 B 點作 N 平行 L，
 $\because L \parallel M \therefore N \parallel M$
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 5$ ，
 $\angle 3 = \angle 4 + \angle 6$
 故 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 4$



4. 平行線上的三角形面積（同底等高的概念）

當 A 點在 L 上移動時... $\triangle ABC$ 的形狀會隨之改變，但是 $\triangle ABC$ 的面積是不變的。

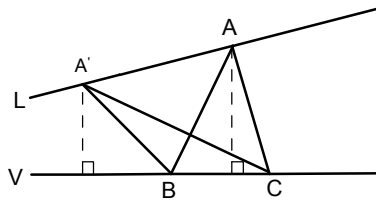


說明： $\triangle ABC$ 的底永遠是 \overline{BC} （同底）

$\triangle ABC$ 的高 \overline{AH} 是定值（等高）（ \overline{AH} 即為平行線 L、V 的距離）

那假設 L 與 V 不平行的話，如下圖：

當 A 點在 L 上移動時... $\triangle ABC$ 的形狀會隨之改變，則 $\triangle ABC$ 的面積會隨著高度不同而改變。



說明： $\triangle ABC$ 的底永遠是 \overline{BC} （同底）

$\triangle ABC$ 的高會隨著 L、V 之間的距離不同而改變，所以面積也會跟著改變。

$\triangle ABC$ 面積 $>$ $\triangle A'BC$ 面積

5. 利用平行線性質證明三角形內角和 = 180°

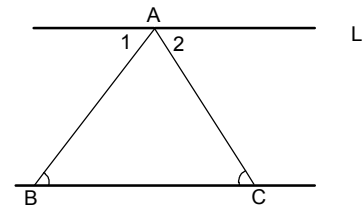
如圖，試證明 $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$

【證明】過 A 點作直線 L 平行 \overline{BC}

$\therefore \angle ABC = \angle 1$ ； $\angle ACB = \angle 2$ （內錯角相等）

$\therefore \triangle ABC$ 內角和 = $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC$

= $\angle 2 + \angle 1 + \angle BAC = 180^\circ$



6. 利用平行線性質證明外角定理

如圖，試證明 $\angle 1 = \angle ABC + \angle BAC$

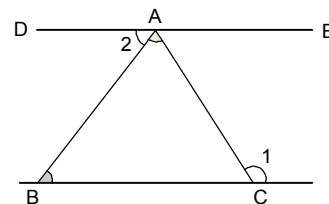
【證明】過 A 點作直線 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \angle ABC = \angle 2$ （內錯角相等）

$\therefore \angle 1 = \angle DAC$

= $\angle 2 + \angle BAC$

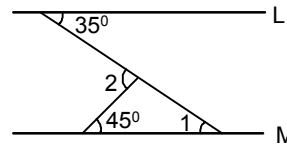
= $\angle ABC + \angle BAC$



【範例】如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1 = ?$ $\angle 2 = ?$

【解說】 $\angle 1 = 35^\circ$ （內錯角相等）

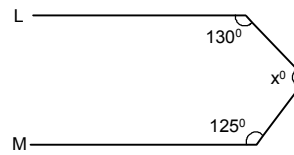
$$\angle 2 = 35^\circ + 45^\circ = 80^\circ$$



【範例】如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $x = ?$

【解說】 $130^\circ + x + 125^\circ = 360^\circ$

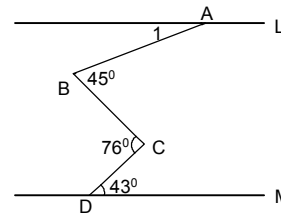
$$\therefore x = 105^\circ$$



【範例】如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1 = ?$

【解說】 $\angle 1 + 76^\circ = 45^\circ + 43^\circ$

$$\therefore \angle 1 = 12^\circ$$



【範例】如附圖，長方形 $ABCD$ 中，沿 \overline{AC} 摺疊， D 點

落在 D' 點上，若 $\angle DAC = 25^\circ$ ，則：

(1) $\angle ACD = ?$ (2) $\angle AEB = ?$ (3) $\angle ECD = ?$

【解說】(1) $\triangle ADC$ 中， $\angle DAC = 25^\circ$ ， $\angle D = 90^\circ$

$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ = \angle ACD'$$

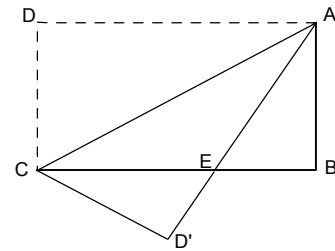
(2) $\therefore \angle DAC = \angle D'AC = 25^\circ$

$$\therefore \angle DAE = \angle DAC + \angle D'AC = 50^\circ$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB = 50^\circ \text{（內錯角相等）}$$

(3) $\therefore \angle ACE = \angle DAC = 25^\circ$ （內錯角相等）

$$\therefore \angle ECD' = \angle ACD' - \angle ACE = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ$$



【範例】如附圖， $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ，且正五邊形 $EFGHI$ 的

頂點 H 、 F 分別在 \overleftrightarrow{AB} 、 \overleftrightarrow{CD} 上，又 $\angle GFD$ 的

度數是 $\angle EFC$ 的 3 倍，求：(1) $\angle GFD = ?$

(2) $\angle AHI = ?$

【解說】(1) 正五邊形一內角 $= \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$

$$\text{設 } \angle EFC = x^\circ \quad \therefore \angle GFD = 3x^\circ$$

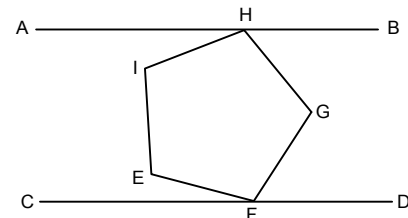
$$\Rightarrow x^\circ + 108^\circ + 3x^\circ = 180^\circ, \quad x^\circ = 18^\circ$$

$$\text{故 } \angle GFD = 18^\circ \times 3 = 54^\circ$$

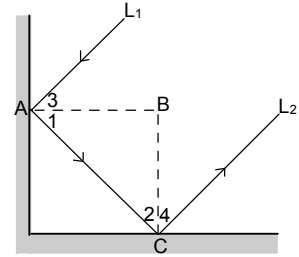
(2) $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \quad \therefore \angle HGF = \angle BHG + \angle GFD$

$$\therefore 108^\circ = \angle BHG + 54^\circ, \quad \angle BHG = 54^\circ$$

$$\therefore \angle AHI = 180^\circ - 54^\circ - 108^\circ = 18^\circ$$

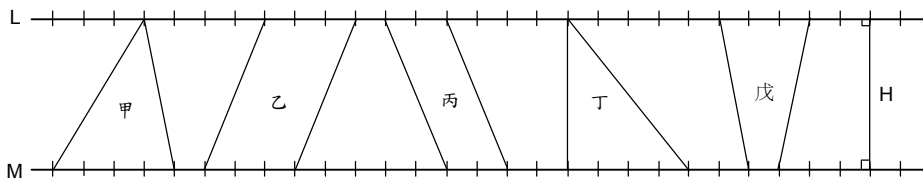


【範例】如附圖，有一條光線 L_1 經過兩個互相垂直的平面鏡反射後，反射光線為 L_2 ，那麼 L_1 和 L_2 是否平行？為什麼？



【解說】 $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，
 又 $\angle 1 = \angle 3$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ，
 所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ （同側內角互補），
 故 $L_1 \parallel L_2$ 。

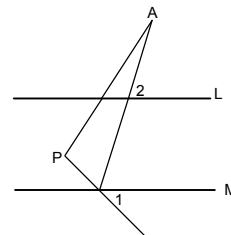
【範例】若 $L \parallel M$ ，選出面積相同的圖形



【解說】 甲面積：甲 $= \frac{1}{2} \times 4 \times H = 2H$ 乙面積：乙 $= 3H$
 丙面積：丙 $= 2H$ 丁面積：丁 $= \frac{1}{2} \times 4 \times H = 2H$
 戊面積：戊 $= \frac{1}{2} \times (3+1) \times H = 2H$

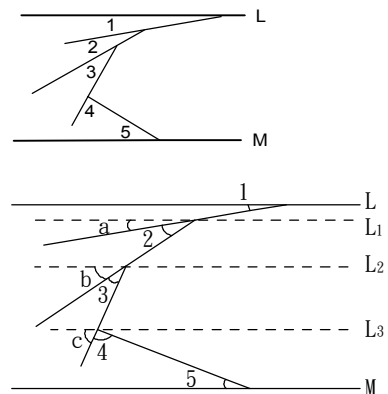
【範例】如圖，已知 $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = 40^\circ$ 、 $\angle 2 = 70^\circ$ 、 $\angle A = 25^\circ$ ，則 $\angle P =$ _____ 度。

【解說】 $\angle P = \angle 1 + \angle 2 - \angle A$
 $= 110^\circ - 25^\circ$
 $= 85^\circ$



【範例】如圖，已知 $L \parallel M$ ，請問：
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ 等於 _____ 度。

【解說】 作 L_1 、 L_2 、 L_3 平行 L
 $\therefore L \parallel L_1 \quad \therefore \angle 1 = \angle a$ （同位角相等）
 $\therefore L_1 \parallel L_2 \quad \therefore \angle a + \angle 2 = \angle b$ （同位角相等）
 $\therefore L_2 \parallel L_3 \quad \therefore \angle b + \angle 3 = \angle c$ （同位角相等）
 則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$
 $= \angle a + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$
 $= \angle b + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$
 $= \angle c + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$



【範例】如附圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，若 $\angle 1 = 80^\circ$ ，
 $\angle 2 = 40^\circ$ ，則 $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

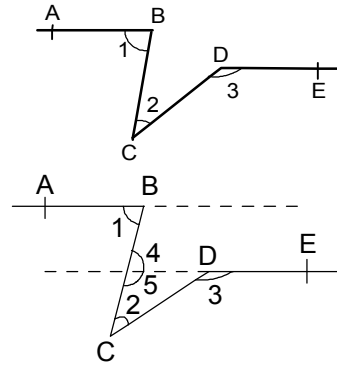
【解說】作 \overrightarrow{AB} 與 \overleftarrow{ED}

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\therefore \angle 1 = \angle 4 = 80^\circ$ (內錯角相等)

$\therefore \angle 5 = 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

$\angle 3 = \angle 2 + \angle 5 = 40^\circ + 100^\circ = 140^\circ$

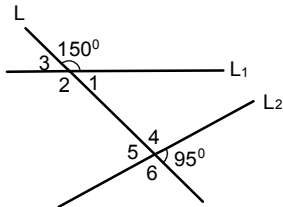


小 試 身 手

【範例一】

如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，求：

- $\angle 1 = \underline{\hspace{1cm}}$ 度， $\angle 1$ 的內錯角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 2 = \underline{\hspace{1cm}}$ 度， $\angle 3$ 的同位角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。



解答：

$$\angle 1 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

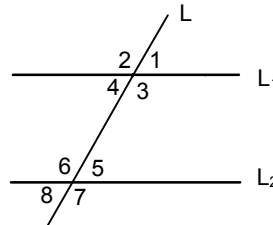
$$\angle 1 \text{ 的內錯角是 } \angle 5 = 95^\circ$$

$$\angle 2 = 150^\circ, \angle 3 \text{ 的同位角是 } \angle 5 = 95^\circ$$

【練習一】

如圖，L 是 L_1 與 L_2 的截線，設 $\angle 1 = 50^\circ$ 求：

- $\angle 3$ 的內錯角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
 $\angle 3$ 的同側內角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 5$ 的同位角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 4$ 的鄰角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。
- $\angle 6$ 的對頂角是 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，其度數是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 度。



解答：

$$\angle 3 \text{ 的內錯角是 } \angle 6 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\angle 3 \text{ 的同側內角是 } \angle 5 = 50^\circ$$

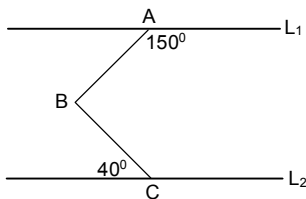
$$\angle 5 \text{ 的同位角是 } \angle 1 = 50^\circ$$

$$\angle 4 \text{ 的鄰角是 } \angle 2 \text{ 或 } \angle 3 = 130^\circ$$

$$\angle 6 \text{ 的對頂角是 } \angle 7 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

【範例二】

如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，求 $\angle ABC = ?$

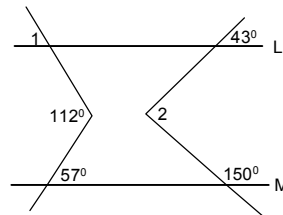


解答：

$$\angle ABC = 180^\circ - 150^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

【練習二】

如圖，已知 $L \parallel M$ ，則 $\angle 1 + \angle 2 = ?$

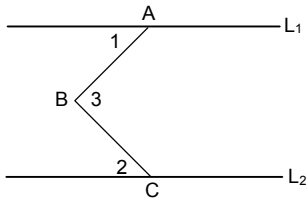


解答：

$$\angle 1 = 112^\circ - 57^\circ = 55^\circ$$

【範例三】

如圖， $L \parallel M$ ， $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$ ，且
 $\angle 3 = 99^\circ$ ，則 $\angle 1 = ?$

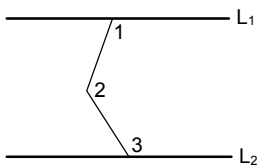


解答：

- (1) $\angle ABC = 180^\circ - 150^\circ + 40^\circ = 70^\circ$
 (2) 設 $\angle 1 = 4x^\circ$ ， $\angle 2 = 5x^\circ$
 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = 4x^\circ + 5x^\circ = 99^\circ$
 $\Rightarrow x = 11$
 $\Rightarrow \angle 1 = 4x^\circ = 44^\circ$

【範例四】

如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，若 $\angle 1 = 100^\circ$ ， $\angle 2 = 150^\circ$ ，
 則 $\angle 3 = ?$

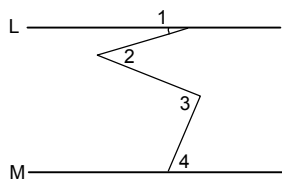


解答：

- $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$
 $\Rightarrow \angle 3 = 360^\circ - \angle 1 - \angle 2$
 $= 360^\circ - 100^\circ - 150^\circ = 110^\circ$

【範例五】

如圖， $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = 12^\circ$ 、 $\angle 2 = 33^\circ$ 、
 $\angle 3 = 95^\circ$ ，則 $\angle 4 = ?$

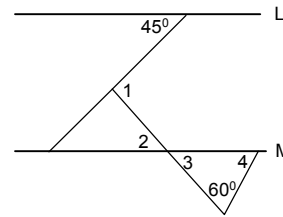


解答：

- $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$
 $\Rightarrow 12^\circ + 95^\circ = 33^\circ + \angle 4$
 $\Rightarrow \angle 4 = 107^\circ - 33^\circ = 74^\circ$

【練習三】

如圖，已知 $L \parallel M$ ，若 $\angle 1 = (7x+1)^\circ$ ，
 $\angle 2 = (3x+8)^\circ$ ，則 $\angle 1 + \angle 4 = ?$

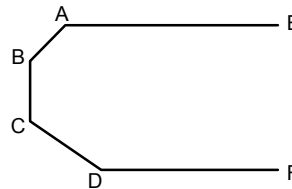


解答：

- (1) $\angle 1 = 112^\circ - 57^\circ = 55^\circ$
 $\angle 2 = 180^\circ - 150^\circ + 43^\circ = 73^\circ$
 $\angle 1 + \angle 2 = 55^\circ + 73^\circ = 128^\circ$
 (2) $\angle 1 = \angle 2 + 45^\circ$
 $\Rightarrow 7x + 1 = 3x + 8 + 45$
 $\therefore x = 13$
 $\therefore \angle 1 = 92^\circ$ ， $\angle 2 = 47^\circ = \angle 3$
 $\therefore \angle 4 = 73^\circ$
 $\therefore \angle 1 + \angle 4 = 165^\circ$

【練習四】

如圖， $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$ ， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ?$

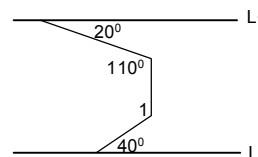


解答：

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$

【練習五】

如圖， $L_1 \parallel L_2$ ，求 $\angle 1$ 的度數。

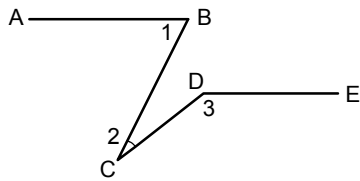


解答：作 $L_3 \parallel L_1 \parallel L_4 \parallel L_2$ ，

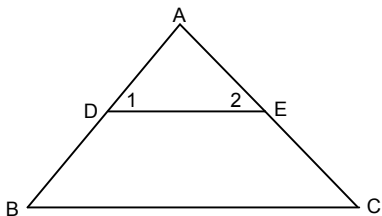
- 所以 $\angle 2 = 20^\circ$ ，
 $\angle 3 = 110^\circ - 20^\circ = 90^\circ$ ，
 $\angle 4 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，
 $\angle 5 = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle 1 = \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$

【範例六】

- (1) 如圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ，若 $\angle 1 = 80^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ ，則 $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- (2) 如圖， $\angle 1 = \angle A$ ，且 $10\angle 1 = 5\angle B = 2\angle C$ 則 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 度。



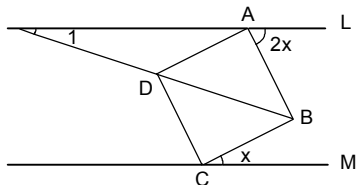
解答：

$$\begin{aligned} (1) \because \angle 3 &= \angle 2 + (180^\circ - \angle 1) \\ &= 40^\circ + 100^\circ \\ &= 140^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 10\angle 1 &= 5\angle B = 2\angle C \\ \Rightarrow 10\angle A &= 5\angle B = 2\angle C \\ \Rightarrow \angle A : \angle B : \angle C &= 1:2:5 \\ \because \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \angle B &= \frac{2}{8} \times 180^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

【範例七】

如圖， $L \parallel M$ ， $ABCD$ 為正方形，求 $\angle 1$ 。

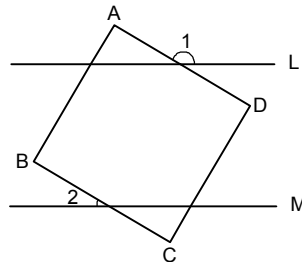


解答：

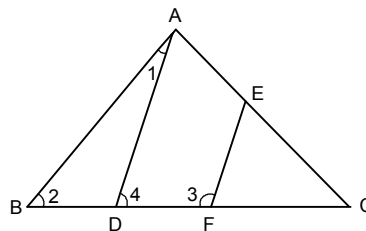
$$\begin{aligned} \angle ABC &= x^\circ + 2x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 30 \\ \angle ADB &= 45^\circ = \angle 1 + (180^\circ - 90^\circ - 2 \times 30^\circ) \\ \Rightarrow \angle 1 &= 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \end{aligned}$$

【練習六】

- (1) 如圖，已知 $L \parallel M$ ，四邊形 $ABCD$ 為正方形，若 $\angle 1 = 150^\circ$ ，則 $\angle 2 = ?$



- (2) 如圖， $\angle 1 = 15^\circ$ ， $\angle 2 = 50^\circ$ ，則當 $\angle 3 = ?$ 時 $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ 。



解答：

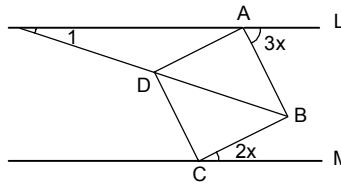
$$\begin{aligned} (1) \angle 1 &= \angle 4 + \angle A = \angle 4 + 90^\circ \\ \Rightarrow \angle 4 &= \angle 1 - 90^\circ \\ &= 150^\circ - 90^\circ \\ &= 60^\circ = \angle 3 \\ \angle 2 &= \angle ABC - \angle 3 \\ &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \end{aligned}$$

- (2) 若 $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \Rightarrow \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \because \angle 4 &= \angle 1 + \angle 2 = 15^\circ + 50^\circ = 65^\circ \\ \angle 3 &= 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \end{aligned}$$

【練習七】

如圖， $L \parallel M$ ， $ABCD$ 為正方形，求 $\angle 1$

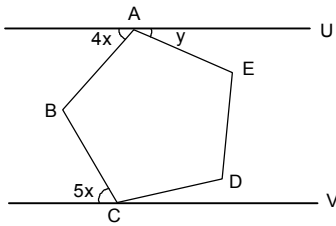


解答：

$$\begin{aligned} \angle ABC &= 3x^\circ + 2x^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 18 \\ \angle ADB &= 45^\circ = \angle 1 + (180^\circ - 90^\circ - 3 \times 18^\circ) \\ \angle 1 &= 45^\circ - 36^\circ = 9^\circ \end{aligned}$$

【範例八】

如圖， $U \parallel V$ ， $ABCDE$ 為正五邊形，求 y°



解答：

$$\angle ABC = \frac{(5-2)}{5} \times 180^\circ = 108^\circ = 4x^\circ + 5x^\circ$$

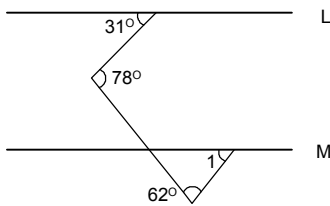
$$\Rightarrow x = 12$$

$$4x + y + 108^\circ = 180^\circ$$

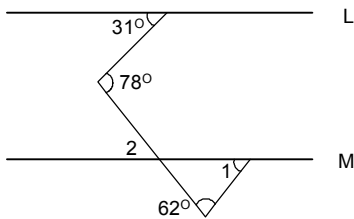
$$y = 180^\circ - 108^\circ - 48^\circ = 24^\circ$$

【範例九】

如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1$ 。



解答：



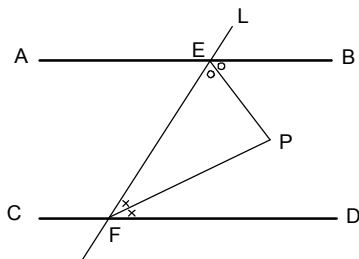
$$\angle 2 = 78^\circ - 31^\circ = 47^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 1 + 62^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle 2 - 62^\circ = 71^\circ$$

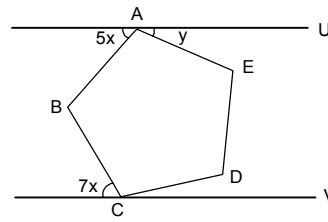
【範例十】

如圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， L 為截線， \overline{EP} 平分 $\angle BEF$ ， \overline{FP} 平分 $\angle EFD$ ，試說明 \overline{EP} 與 \overline{FP} 之間的關係。



【練習八】

如圖， $U \parallel V$ ， $ABCDE$ 為正五邊形，求 y°



解答：

$$\angle ABC = \frac{(5-2)}{5} \times 180^\circ = 108^\circ = 7x^\circ + 5x^\circ$$

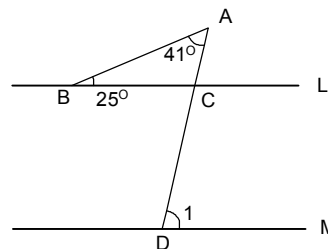
$$\Rightarrow x = 9$$

$$5x + y + 108^\circ = 180^\circ$$

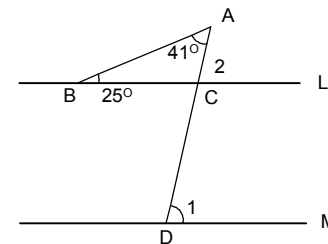
$$y = 180^\circ - 108^\circ - 45^\circ = 27^\circ$$

【練習九】

如圖，若 $L \parallel M$ ，求 $\angle 1$ 。



解答：



$$\angle 1 = \angle 2 = 25^\circ + 41^\circ = 66^\circ$$

【練習十】

如圖，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， L 為截線， \overline{EP} 平分 $\angle BEF$ ， \overline{FP} 平分 $\angle EFD$ ，且 $\angle BEF = 120^\circ$ ，試問：(1) $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 各多少度？

(2) $\angle 1 + \angle 3 = ?$

解答：

$$\angle 1 = \angle 2 = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$$

$$\angle EFD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 60^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 3 = 120^\circ$$

