四邊形

平行四邊形

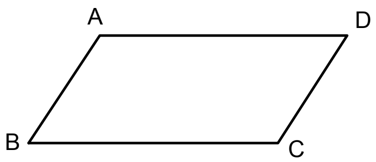
我們在這個章節要討論一些具有平行邊的四邊形：平行四邊形、梯形，並將之前學過的菱形、鳶形作個整理。

平行四邊形

平行四邊形的定義： 兩雙對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形。

如下圖，若 $\overline{AB}//\overline{CD}$ 且 $\overline{AD}//\overline{BC}$，則 ABCD 稱為平行四邊形，

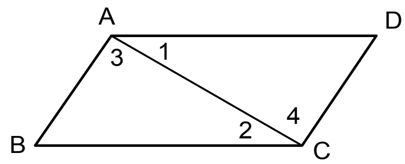
以「▱ABCD」表示。



平行四邊形的性質： 從平行四邊形的性質來看，我們可以發現基本上都是由之前所學過的平行性質以及三角形的性質所構成，以下列出 5 點性質，我們將一一來證明。

【性質 1】對角線將平行四邊形分為兩個全等三角形。
【性質 2】平行四邊形之兩雙對邊分別相等。
【性質 3】平行四邊形之兩雙對角分別相等。
【性質 4】平行四邊形之兩對角線互相平分。
【性質 5】平行四邊形之對邊平行且相等。(定義+性質一)

【性質 1】對角線將平行四邊形分為兩個全等三角形。



【已知】四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{AC}$ 為對角線

【求證】$\triangle ABC \cong \triangle CDA$

【證明】∵四邊形 ABCD 為平行四邊形

$\therefore \overline{AB}//\overline{CD}$，且 $\overline{AD}//\overline{BC}$

$\because \overline{AB}//\overline{CD}$　　$\therefore \angle 3=\angle 4$。

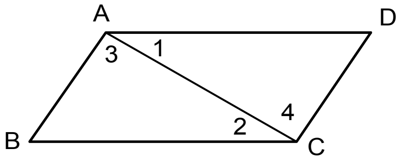
$\because \overline{AD}//\overline{BC}$　　$\therefore \angle 1=\angle 2$。

在$\triangle ABC$ 與$\triangle CDA$ 中，$\because \overline{AC}=\overline{AC}$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$(ASA)，

【性質 2】平行四邊形之兩雙對邊相等。

【已知】四邊形 ABCD 為平行四邊形



【求證】$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$

【證明】∵四邊形 ABCD 為平行四邊形　　∴$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，且$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$

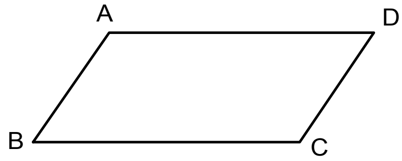
∵$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$　　∴$\angle 3=\angle 4$。

∵$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$　　∴$\angle 1=\angle 2$。

在△ABC 與△CDA 中，∵$\overline{AC}=\overline{AC}$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

∴△ABC≅△CDA(ASA)，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$（對應邊相等）

【性質 3】平行四邊形之兩雙對角相等。



【已知】四邊形 ABCD 為平行四邊形

【求證】∠A＝∠C，∠B＝∠D

【證明】∵四邊形 ABCD 為平行四邊形　　∴$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，且$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$

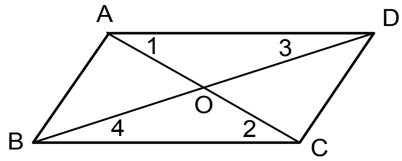
∵$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，　∴$\angle B+\angle C=180^0$∟∟（1）(同側內角互補)。

∵$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，　∴$\angle A+\angle B=180^0$∟∟（2）(同側內角互補)。

由（1)（2）可推∠A＝∠C　　同理可證∠B＝∠D

【性質 4】平行四邊形之兩對角線互相平分。

【已知】四邊形 ABCD 為平行四邊形



【求證】$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$

【證明】∵四邊形 ABCD 為平行四邊形　　∴$\overline{AD}=\overline{BC}$，且$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$

∵$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$　　∴$\angle 3=\angle 4$。

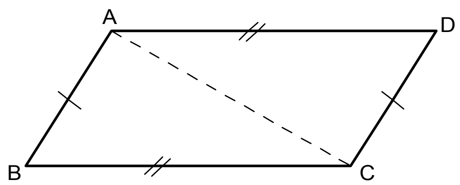
∵$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$　　∴$\angle 1=\angle 2$。

在△AOD 與△COB 中，　∵$\overline{AD}=\overline{BC}$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

∴△AOD≅△COB(ASA)，$\overline{AO}=\overline{OC}$，$\overline{BO}=\overline{OD}$（對應邊相等）

【性質 5】平行四邊形的對邊平行且相等。

【已知】四邊形 ABCD 為平行四邊形



【求證】$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$ 且 $\overline{AB}=\overline{CD}$

$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}=\overline{BC}$

【證明】由平行四邊形定義可知平行四邊形兩雙對邊分別平行，

並且由(性質一)可知對角線將平形四邊形分為兩個全等三角形，

所以由以上兩個條件可以得到

$\overline{AB} // \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AD} // \overline{BC}$ 且 $\overline{AD} = \overline{BC}$

平行四邊形的判別

我們可以從以下的判別性質更容易地判斷一個四邊形是不是平行四邊形？

(1) **兩雙對邊平行**的四邊形會是平行四邊形（定義）

(2) **一雙對邊平行且相等**的四邊形也會是平行四邊形

(3) **兩雙對邊分別相等**的四邊形也會是平行四邊形

(4) **兩雙對角分別相等**的四邊形也會是平行四邊形

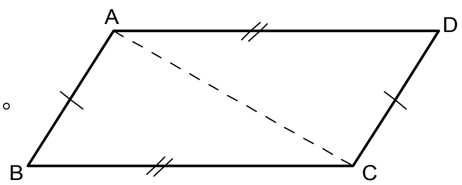
(5) **兩對角線互相平分**的四邊形也會是平行四邊形

接著我們一一來證明：

我們在以下證明的過程中，將可發現要證明平行四邊形的判別，其實都是證明相對的邊平行，並且找出某些角的關係。例如:內錯角相等、同位角相等、同側內角互補…。利用這些特性，將可幫助我們完成以下的証明。

(1)兩雙對邊平行的四邊形會是平行四邊形（定義）

(2)一雙對邊平行且相等的四邊形也會是平行四邊形



【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} // \overline{CD}$。

【求證】ABCD 為平行四邊形。

【證明】(1)連接 $\overline{AC}$。

(2)$\because \overline{AB} // \overline{CD}$， $\therefore \angle BAC = \angle DCA$。

(3)在△ABC 與△CDA 中，

$\because \overline{AB} = \overline{CD}$，$\angle BAC = \angle DCA$，$\overline{AC} = \overline{AC}$，

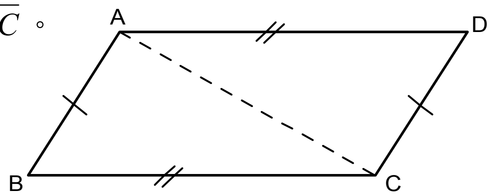
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$(SAS)， $\therefore \angle ACB = \angle CAD$。

(4)$\because \angle ACB = \angle CAD$， $\therefore \overline{AD} // \overline{BC}$。

(5)$\because \overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{AD} // \overline{BC}$，$\therefore$ABCD 為平行四邊形。

(3)兩雙對邊分別相等的四邊形也會是平行四邊形

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$。



【求證】ABCD 為平行四邊形。

【證明】(1)連接$\overline{AC}$。

(2)在△ABC 與△CDA 中，

$\because \overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{BC}=\overline{AD}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

∴△ABC≅△CDA（SSS）

∴∠BAC＝∠DCA，∠ACB＝∠CAD。

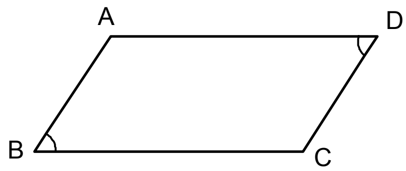
(3)∵∠BAC＝∠DCA，∴$\overline{AB}//\overline{CD}$；

∵∠ACB＝∠CAD，∴$\overline{AD}//\overline{BC}$。

(4)$\because \overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AD}//\overline{BC}$，∴ABCD 為平行四邊形。

(4)兩雙對角分別相等的四邊形也會是平行四邊形

【已知】在四邊形 ABCD 中，∠A＝∠C，∠B＝∠D。



【求證】ABCD 為平行四邊形。

【證明】(1) ∵∠A＝∠C，∠B＝∠D

∴∠A＋∠B＝∠C＋∠D

(2) ∵∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360^0，

∴∠A＋∠B＝180^0。

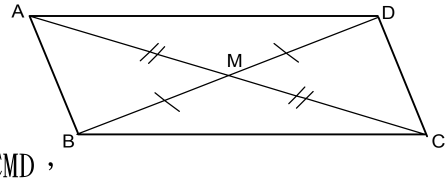
(3) ∵∠A 與∠B 互補， ∴$\overline{AD}//\overline{BC}$

(4)同理，$\overline{AB}//\overline{CD}$

(5)$\because \overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}//\overline{CD}$，∴ABCD 為平行四邊形

(5)兩對角線互相平分的四邊形也會是平行四邊形

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於 M，且$\overline{AM}=\overline{CM}$，$\overline{BM}=\overline{DM}$。



【求證】ABCD 為平行四邊形。

【證明】(1)在△ABM 與△CDM 中，

$\because \overline{AM}=\overline{CM}$，$\overline{BM}=\overline{DM}$，∠AMB＝∠CMD，

∴△ABM≅△CDM(SAS)，∴∠AMB＝∠CMD。

(2)∵∠ABM＝∠CDM，∴$\overline{AB}//\overline{CD}$。

(3)同理在△AMD 及△CMB 為全等

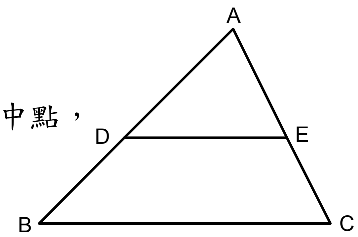
$\because \angle DAM = \angle BCM$， $\therefore \overline{AD} // \overline{BC}$。

(4)$\because \overline{AB} // \overline{CD}$，$\overline{AD} // \overline{BC}$， $\therefore$ABCD 為平行四邊形。

有關平行四邊形的應用

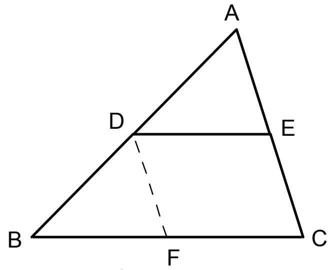
1.三角形兩邊中點連線性質：

過一個三角形一邊的中點，作底邊的平行線會通過另一邊的中點，且兩邊中點的連線長度等於底邊長度的一半。



如右圖，△ABC 中，若 $\overline{AD} = \overline{BD}$，$\overline{DE} // \overline{BC}$，

則 $\overline{AE} = \overline{CE}$ 且 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$。



【證明】(1) 過 D 點作 $\overline{DF} // \overline{AC}$，交 $\overline{BC}$ 於 F 點

$\because \overline{DE} // \overline{BC}$ $\therefore$DFCE 為平行四邊形（兩雙對邊互相平行）

$\Rightarrow \overline{DE} = \overline{CF}$，$\overline{DF} = \overline{CE}$

(2) 在△ADE 與△DBF 中，$\because \overline{DE} // \overline{BC}$，$\overline{DF} // \overline{AC}$

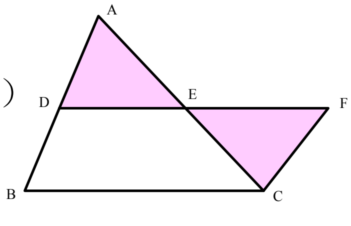
$\therefore \angle ADE = \angle B$，$\angle BDF = \angle A$，

又 $\overline{AD} = \overline{BD}$ $\therefore$△ADE≅△DBF（ASA）

$\therefore \overline{DF} = \overline{AE}$，$\overline{DE} = \overline{BF}$ $\therefore \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

【範例】D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點。在 $\overline{DE}$ 的延長線上取點 F，使得 $\overline{DE} = \overline{EF}$，連接 $\overline{CF}$

【試證】(1)四邊形 BCFD 是平行四邊形。(2) $\overline{DE} // \overline{BC}$ 且 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$。



【證明】(1) 在△ADE 與△CFE 中，$\because \overline{AE} = \overline{CE}$，$\overline{DE} = \overline{EF}$，

$\angle AED = \angle CEF$(對頂角) $\therefore$△ADE≅△CFE(SAS 全等)

故 $\overline{AD} = \overline{CF}$，$\angle ADE = \angle F$。

$\because \angle ADE = \angle F$ $\therefore \overline{AD} // \overline{CF}$（內錯角相等），即 $\overline{AB} // \overline{CF}$、$\overline{BD} // \overline{CF}$。

∵ $\overline{BD}//\overline{CF}$，且 $\overline{BD}=\overline{AD}=\overline{CF}$，∵BCFD 是平行四邊形。

(2) 由(1)可知 $\overline{DF}//\overline{BC}$，且 $\overline{DF}=\overline{BC}$，所以 $\overline{DE}//\overline{BC}$，

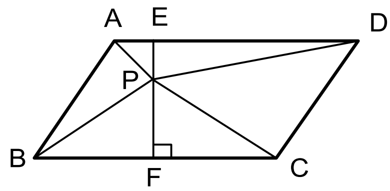
因此 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。

【範例】已知 P 為▱ABCD 內部任一點

【試證】(1)△ABP＋△CPD＝△APD＋△BPC

(2)若△APB＝12 cm^2，△APD＝15 cm^2，△BPC＝20 cm^2，求△CPD 面積

【證明】(1)過 P 作直線 L 垂直 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$，且交 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 於 E、F



△APD＋△BPC

$=\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{PF}$

$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{PF}$

$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times(\overline{PE}+\overline{PF})$

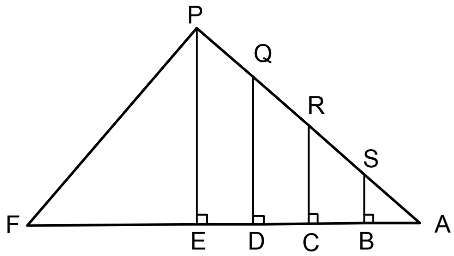
$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{EF}=\frac{1}{2}$▱ABCD

∴△ABP＋△PCD＝$\frac{1}{2}$▱ABCD

∴△ABP＋△PCD＝△APD＋△BPC

(2)△CPD＝△APD＋△BPC－△ABP＝15＋20－12＝23（cm^2）

【範例】如右圖，S、R、Q 在 $\overline{AP}$ 上，B、C、D、E 在 $\overline{AF}$ 上，其中 $\overline{BS}$、$\overline{CR}$、$\overline{DQ}$、$\overline{PE}$ 皆垂直於 $\overline{AF}$，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若 $\overline{PE}=2$，則 $\overline{BS}+\overline{CR}$ 的長是多少？



【解說】∵ $\overline{BS}$、$\overline{CR}$、$\overline{DQ}$、$\overline{PE}$ 皆垂直於 $\overline{AF}$

∴ $\overline{BS}//\overline{CR}//\overline{DQ}//\overline{PE}$

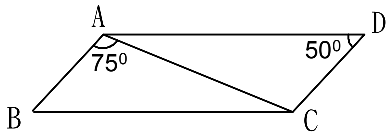
在△APE 中, 又∵C、R 分別為 $\overline{AE}$ 及 $\overline{AP}$ 的中點

$\Rightarrow \overline{CR}=\frac{1}{2}\overline{PE}=1$

同理 $\overline{BS}=\frac{1}{2}\overline{CR}=\frac{1}{2}$　　∴ $\overline{BS}+\overline{CR}=\frac{3}{2}$

2.有關平行四邊形性質的計算：

【範例】如圖，已知一平行四邊形 ABCD，$\overline{AC}$ 為對角線，求∠ACD 與∠ACB。



【解說】 $\because \overline{AD}//\overline{BC}$ $\therefore$∠BAC＝∠ACD＝75^{0}

$\because \overline{AB}//\overline{CD}$ $\therefore$∠B＋∠BCD＝180^{0}

50^{0}＋∠BCD＝180^{0} $\therefore$∠BCD＝130^{0}

∠ACB＝$130^{0}－75^{0}＝55^{0}$

【範例】已知一平行四邊形 ABCD，$\overline{AB}＝3\overline{AD}$，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$ 的差為 6 公分，

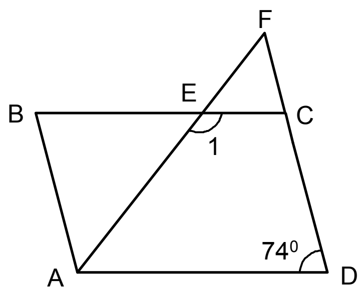
試求此平行四邊形的周長。

【解說】設 $\overline{AD}$＝X 公分，則 $\overline{AB}$＝3X 公分

3X－X＝6 ⇒X＝3 公分

$\overline{AB}$＝9 公分 $\therefore$周長＝2（$\overline{AB}＋\overline{AD}$）＝24 公分

【範例】如右圖，▱ ABCD 中，$\overline{AF}$ 平分∠BAD，∠D＝74^{0}，



$\overline{DF}$＝27 公分，$\overline{AB}$＝19 公分，試求出

（1）∠1 為多少度？

（2）▱ ABCD 的周長？

【解說】（1） ∠BAD＝180^{0}－∠D＝106^{0}

∠DAE＝∠BAE＝$106^{0}÷2＝53^{0}$

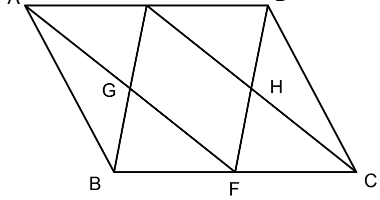
∠1＝180－∠DAE＝$180^{0}－53^{0}＝127^{0}$

∠F＝180－∠D－∠DAE＝53^{0}

（2）∠F＝∠DAE ⇒ $\overline{AD}＝\overline{DF}$＝27 公分

▱ ABCD 的周長＝2（19＋27）＝92

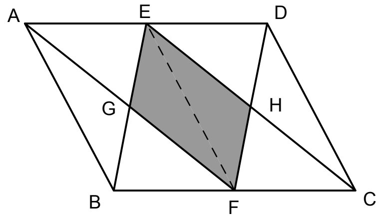
【範例】如右圖，ABCD 為平行四邊形，E、F 分別為



$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 的中點。已知平行四邊形 ABCD 的

面積為 100 平方公分，試求四邊形 EGFH 的面積。

【解說】連接 $\overline{EF}$，則 ABFE 與 DCFE 皆為平行四邊形



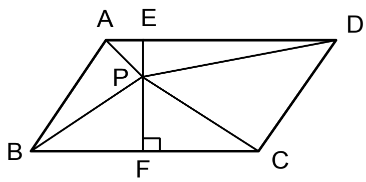
ABFE 面積＝$\frac{1}{2}$×100＝50

【範例】已知 P 為▱ABCD 內部任一點

【試證】(1)△ABP＋△CPD＝△APD＋△BPC

(2)若△APB＝12 cm^2，△APD＝15 cm^2，△BPC＝20 cm^2，求△CPD 面積

【證明】(1)過 P 作直線 L 垂直 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$，且交 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 於 E、F



$$\triangle APD+\triangle BPC=\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{PF}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{PE}+\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{PF}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times(\overline{PE}+\overline{PF})=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{EF}=\frac{1}{2}▱ABCD$$

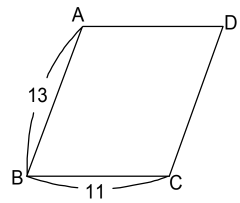
∴△ABP＋△PCD＝$\frac{1}{2}$▱ABCD　　∴△ABP＋△PCD＝△APD＋△BPC

(2)△CPD＝△APD＋△BPC－△ABP＝15＋20－12＝23（cm^2）

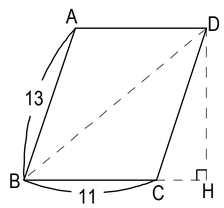
△GEF＝$\frac{1}{4}\times 50=\frac{25}{2}$　∴EGFH 面積＝$\frac{25}{2}\times 2$＝25 平方公分

【範例】如圖，▱ABCD 中，$\overline{AB}$＝13 公分，$\overline{AD}$＝11 公分，面積是 132 平方公分，

則對角線 $\overline{BD}$ 長是多少公分?



【解】作 $\overline{DH}\perp\overleftrightarrow{BC}$ 於 H，▱ABCD 面積＝$\overline{BC}\times\overline{DH}=11\times\overline{DH}=132$



$\therefore\ \overline{DH}=12$　　$\therefore\ \overline{CH}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{DH}^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{DH}^2}=\sqrt{(11+5)^2+12^2}=20$(公分)

【範例】如圖，四邊形 MBNH 是平行四邊形 ABCD 和平行四邊形 EFGH 重疊的部份。已知∠1＝55°、∠2＝120°、∠3＝65°，求(1)∠MHN 的度數。(2)四邊形 MBNH 是否為平行四邊形？為什麼？(3)平行四邊形 ABCD 的四個角∠A、∠B、∠C、∠D 的度數。

【解】(1)∠MHN＝∠F

＝180°－∠2 ＝180°－120° ＝60°

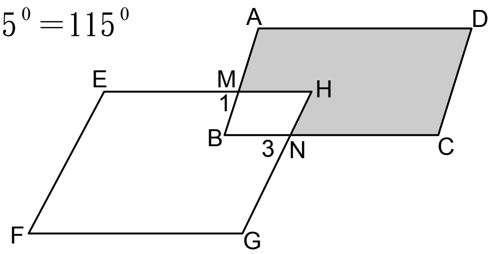
(2)∠BMH＝180°－55°＝125°，∠BNH＝180°－65°＝115°

∴∠ BMH≠∠BNH， 故 MBNH 不為平行四邊形

(3)∠B＝360°－125°－115°－60°＝60°

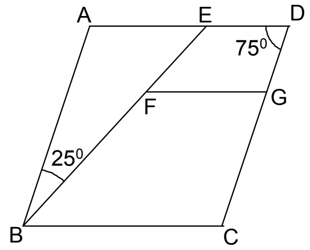
∴∠D＝∠B＝60°

∠A＝∠C ＝180°－60°＝120°



【範例】如圖，四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{ED}//\overline{FG}$，∠D＝75^0，∠ABE＝25^0。

求∠GFB＋∠GCB＝?



【解】∴∠A＝∠C＝180^0－75^0＝105^0

又$\overline{ED}//\overline{FG}$

∴∠GFB＝∠BED＝^{0}A＋∠ABE ＝105^0＋25^0＝130^0

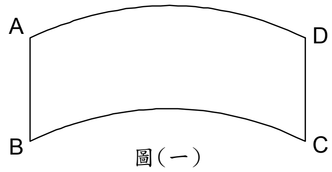
∴∠GFB＋∠GCB＝130^0＋105^0＝235

【範例】(1)玲玲的爸爸剛買一部新車，其雨刷如右圖(一)，且$\overline{AB}$和地面垂直，

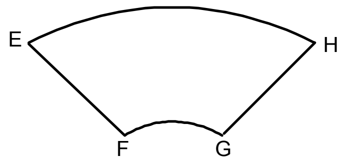
若$\overline{AD}$＝80 公分，$\overline{AB}$＝30 公分，則圖(一)的面積為多少平方公分?

(2)玲玲的爸爸的老車其雨刷如右圖(二)，若$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{GH}$的夾角為 90^{0}且

$\overline{EH}$＝80 公分，$\overline{EF}$＝30 公分，則右圖(二)的面積為多少平方公分?



圖(一)



圖(二)

【解】(1)80×30＝2400(平方公分)

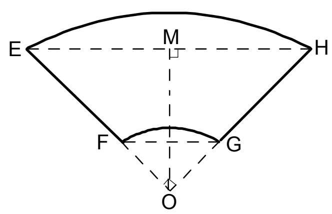
(2)作$\overline{OM}\perp\overline{EM}$，令$\overline{OE}=\overline{OH}=x$

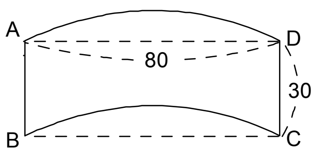
$x^2+x^2=80^2$, $x=\pm 40\sqrt{2}$(負不合)

∴$\overline{OF}=\overline{OG}=40\sqrt{2}-30$

∴刷過的面積＝$\frac{90}{360}\times\pi\times(40\sqrt{2})^2-\frac{90}{360}\times\pi\times(40\sqrt{2}-30)^2$

$=\frac{1}{4}\pi\times(2400\sqrt{2}-900)$(平方公分)





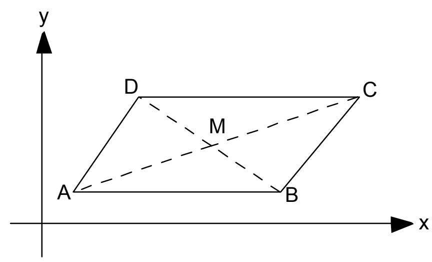
【範例】如右圖，平行四邊形 ABCD，若 A(1,1)，B(12,1)，C(17,5)，則 D 點坐標為何?

【解】Θ平行四邊形之對角線互相平分

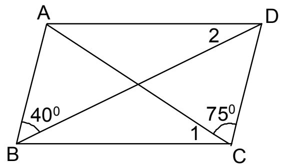
∴M 分別為$\overline{AC}$與$\overline{BD}$之中點

令 D(a,b)

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{a+12}{2}=\dfrac{1+17}{2}\\ \dfrac{b+1}{2}=\dfrac{1+5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\ b=5\end{cases}$$ ∴D(6,5)



【範例】如圖，平行四邊形 ABCD 中，$\angle 1+\angle 2=$？

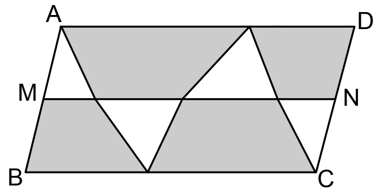


【解】Θ $\angle 1=\angle 3$(內錯角)　　$\angle 4=75^{0}$(內錯角)

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 2=180^{0}-40^{0}-\angle 4=65^{0}$

【範例】如圖，ABCD 是平行四邊形面積 64 平方公分，若 M 是 $\overline{AB}$ 的中點，N 是 $\overline{CD}$ 的中點，則圖中所有深色部分的面積和為多少平方公分?

【解】Θ 空白三角形之高為平行四邊形之高的一半，底之和為 $\overline{BC}$



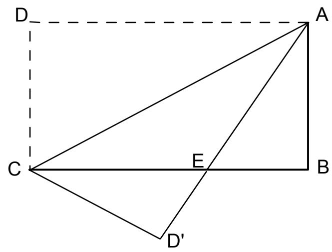
$\therefore$ 空白三角形面積之和

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\square$ ABCD $=\frac{1}{4}\square$ ABCD$=16$

$\therefore$ 深色部分面積$=64-16=48$(平方公分)

【範例】如附圖，長方形 ABCD 中，沿 $\overline{AC}$ 摺疊，D 點落在 D' 點上，若 $\angle$DAC$=25^{0}$，則：(1) $\angle$ACD' ＝？(2) $\angle$AEB＝？(3) $\angle$ECD' ＝？

【解】(1)$\triangle$ADC 中，$\angle$DAC$=25^{0}$，$\angle$D$=90^{0}$



$\therefore \angle$ACD$=180^{0}-25^{0}-90^{0}=65^{0}=\angle$ACD'

(2) $\because \angle$DAC$=\angle$D'AC$=25^{0}$

$\therefore \angle$DAE$=\angle$DAC$+\angle$D'AC$=50^{0}$

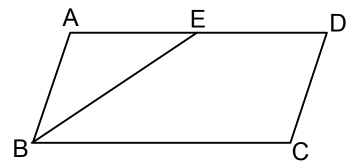
$\therefore \angle$DAE$=\angle$AEB$=50^{0}$（內錯角相等）

(3) $\because \angle$ACE$=\angle$DAC$=25^{0}$（內錯角相等）

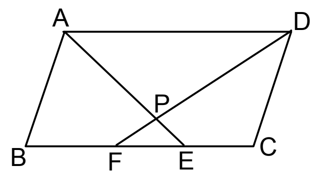
$\therefore \angle$ECD' $=\angle$ACD' $-\angle$ACE$=65^{0}-25^{0}=40^{0}$

【範例】(1)如圖(一)，平行四邊形 ABCD 中，E 為 $\overline{AD}$ 中點，$\overline{AD}=2\overline{AB}$，若 $\angle$ABE$=36^{0}$，求 $\angle$EBC 及 $\angle$C 的度數。

(2)如圖(二)，$\square$ ABCD 中，$\overline{AE}$ 平分 $\angle$BAD，$\overline{DF}$ 平分 $\angle$ADC，若 $\angle$B$=72^{0}$，求 $\angle$APD 及 $\angle$BFP 的度數。



圖(一)



圖(二)

【解】(1) ①$\because \overline{AD}=2\overline{AB}$，又 E 為 $\overline{AD}$ 中點　$\therefore \overline{AD}=2\overline{AE}$

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{AE}$　$\therefore \triangle$ABE 為等腰三角形

故 $\angle$AEB$=\angle$ABE$=36^{0}$

$\because$ 四邊形 ABCD 為平行四邊形，　$\therefore \overline{AD}//\overline{BC}$

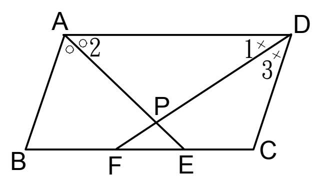
故 $\angle$EBC$=\angle$AEB$=36^{0}$(內錯角相等)

②在 $\triangle$ABE 中，$\angle$ABE$+\angle$AEB$+\angle$A$=180^{0}$

即 $36^{0}+36^{0}+\angle$A$=180^{0}\Rightarrow \angle$A$=180^{0}-72^{0}=108^{0}$

$\therefore \angle$C$=\angle$A$=108^{0}$

(2) ①$\because \square$ ABCD 為平行四邊形　$\Rightarrow \overline{AB}//\overline{CD}$



$\therefore \angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle$BAD$+\angle$CDA$)=\frac{1}{2}\times 180^{0}=90^{0}$

$\therefore \angle$APD$=180-\angle 1-\angle 2\ =180^{0}-90^{0}=90^{0}$

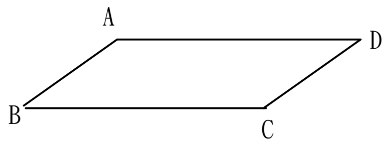
②$\because \angle 3=\frac{1}{2}\angle$ADC$=\frac{1}{2}\angle$B$=\frac{1}{2}\times 72^{0}=36^{0}$

又 $\angle$BFP$=\angle$C$+\angle 3$ ＝（$180^{0}-72^{0}$）$+36^{0}$ ＝144^{0}

小 試 身 手

【範例一】

平行四邊形 ABCD 中，∠B 的兩倍角與∠D 互補，求∠C 的度數。



解答：

設∠B＝X，則∠D＝X

∵2∠B＋∠D＝180^0

⇒2X＋X＝180^0

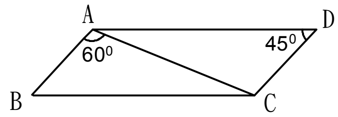
⇒ X＝60^0

∴∠C＝180^0－∠B

＝120^0

【練習一】

如圖，已知一平行四邊形 ABCD，$\overline{AC}$ 為對角線，求∠ACD 與∠ACB。



解答：

∵ $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

∴∠ACB＝∠DAC＝60^0

∵ $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$

∴∠B＋∠BCD＝180^0

45^0＋∠BCD＝180^0

∴∠BCD＝135^0

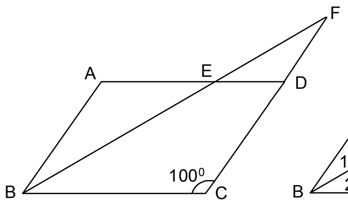
∠ACD＝135^0－60^0＝75^0

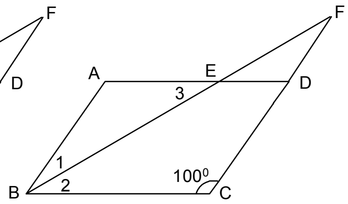
【範例二】

如圖，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{BF}$ 平分∠ABC，$\overline{CF}$＝16，$\overline{AB}$＝12，∠C＝100^0，求：

（1）∠BED 的度數

（2）平行四邊形 ABCD 的周長。





解答：

（1）∵ $\overline{AD}$//$\overline{BC}$，$\overline{BF}$ 平分∠ABC

∴∠1＝∠2＝∠3

又∠A＝∠C＝100^0

∴∠B＝∠D＝80^0

∴∠3＝40^0

∴∠BED＝140^0

（2）∵ $\overline{AD}$//$\overline{BC}$

∴∠1＝∠F

∴∠2＝∠F

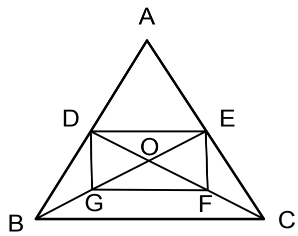
∴ $\overline{BC}$＝$\overline{CF}$＝16

又 $\overline{AE}$＝$\overline{AB}$＝12

周長＝56 公分

【練習二】

△ABC 中，$\overline{BE}$、$\overline{CD}$ 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中線，且相交於 O，G、F 分別為 $\overline{BO}$、$\overline{CO}$ 中點。



【試證】：

(1)DEFG 為平行四邊形

(2)若 DEFG 面積為 10 cm^2，求△ABC 面積

【證明】：

(1)

∵ $\overline{AD}=\overline{BD}$，$\overline{AE}=\overline{CE}$

∴ $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$，$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，

同理 $\overline{GF}$ // $\overline{BC}$，$\overline{GF}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

∴ $\overline{DE}$ // $\overline{GF}$，$\overline{DE}=\overline{GF}$

∴DEFG 為平行四邊形

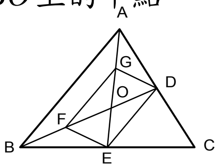
（2）四邊形 DEFG＝$\frac{1}{3}$△ABC

∴△ABC＝3x10＝30 cm^2

【範例三】

已知：△ABC 中，兩中線 $\overline{AE}$、$\overline{BD}$ 相交於 O，G、F 分別為 $\overline{AO}$、$\overline{BO}$ 上的中點

求證：DEFG 為平行四邊形



證明：(1)在△ABC 中，$\overline{AD}=\overline{CD}$，$\overline{BE}=\overline{EC}$

$\therefore \overline{DE}\,//\,\overline{AB}$ 且 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

(2)同理 $\overline{GF}\,//\,\overline{AB}$，且 $\overline{GF}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

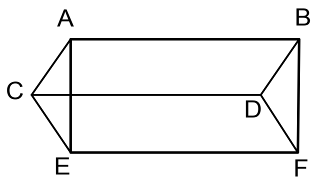
(3)$\therefore \overline{DE}\,//\,\overline{GF}$，且 $\overline{DE}=\overline{GF}$

(4)∴DEFG 為平行四邊形（一雙對邊平行且相等）

【範例四】

已知：ACDB、CEFD 均為平行四邊形

求證：AEFB 也是平行四邊形



證明：(1) ∵ACDB 為平行四邊形

$\therefore \overline{AB}\,//\,\overline{CD}$ 且 $\overline{AB}=\overline{CD}$

(2)同理 CEFD 為平行四邊形

$\therefore \overline{CD}\,//\,\overline{EF}$，且 $\overline{CD}=\overline{EF}$

(3) $\therefore \overline{AB}\,//\,\overline{EF}$，且 $\overline{AB}=\overline{EF}$

(4)AEFB 為平行四邊形（一雙對邊平行且相等）

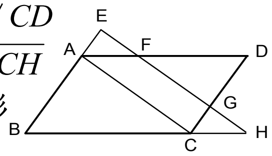
【範例五】

已知：ABCD 是平行四邊形，$\overline{EH}\,//\,\overline{AC}$，且分別交 $\overline{AD}$、$\overline{CD}$ 於 F、G，求證：$\overline{EF}=\overline{GH}$

證明：(1)∵ABCD 為平行四邊形

$\therefore \overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$

(2)$\because \overline{EF}\,//\,\overline{AC}$，$\overline{AF}\,//\,\overline{CH}$



∴ACHF 為平行四邊形

$\therefore \overline{AC}=\overline{FH}$

(3)同理 ACGE 為平行四邊形

$\therefore \overline{GE}=\overline{AC}$

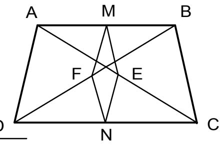
(4)$\therefore \overline{GE}=\overline{FH}$

故 $\overline{GE}-\overline{GF}=\overline{FH}-\overline{GF}$

即 $\overline{EF}=\overline{GH}$

【練習三】

已知：如下圖，四邊形 ABCD 中，M、N 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 的中點，又 E、F 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 的中點求證：MFNE 為平行四邊形



證明：(1)在△BAD 中

$\overline{BM}=\overline{AM}$，$\overline{BF}=\overline{FD}$

$\therefore \overline{MF}\,//\,\overline{AD}$，$\overline{MF}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

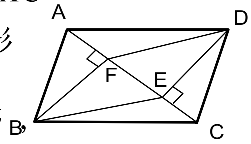
(2)同理 $\overline{EN}\,//\,\overline{AD}$，$\overline{EN}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

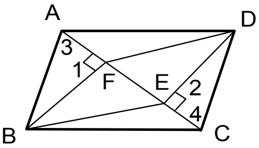
(3) $\therefore \overline{MF}\,//\,\overline{EN}$，且 $\overline{MF}=\overline{EN}$

(4) ∴MFNE 為平行四邊形（一雙對邊平行且相等）

【練習四】

已知：ABCD 為平行四邊形，$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，$\overline{BF}\perp\overline{AC}$ 求證：BEDF 為平行四邊形





證明：(1)$\because \overline{DE}\perp\overline{AC}$，$\overline{BF}\perp\overline{AC}$

$\angle 1=\angle 2=90^{0}$

且 $\overline{DE}\,//\,\overline{BF}$ ㄴㄴ(i)

(2)∵ABCD 為平行四邊形

$\therefore \overline{AB}=\overline{CD}$，且 $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$

$\therefore \angle 3=\angle 4$

(3)$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\overline{AB}=\overline{CD}$

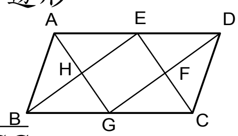
∴△ABF≅△CDE（AAS）

$\therefore \overline{BF}=\overline{DE}$ ㄴㄴ(ii)

(4)由(i)(ii)∴BEDF 為平行四邊形

【練習五】

已知：E、G 分別為平行四邊形 ABCD 中 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 的中點，求證：EFGH 為平行四邊形



證明：(1)∵ABCD 為平行四邊形

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$

$\therefore \overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{GC}$

(2)∴AGCE 為平行四邊形

$\therefore \overline{EF}\,//\,\overline{HG}$

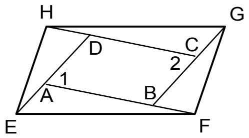
(3)同理 EBGD 為平行四邊形

$\therefore \overline{EH}\,//\,\overline{FG}$

(4) ∴EFGH 為平行四邊形（兩雙對邊互相平行）

【範例六】

已知：ABCD 是平行四邊形，$\overline{AE}=\overline{CG}$，$\overline{BF}=\overline{DH}$



求證：EFGH 為平行四邊形

證明：(1)∵ABCD 為平行四邊形

$\therefore \overline{AB}=\overline{DC}$，且$\angle 1=\angle 2$

(2)在△AEF 與△CGH 中

$\because \overline{AB}=\overline{DC}$，且$\overline{BF}=\overline{DH}$

$\therefore \overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}$

$=\overline{DC}+\overline{DH}=\overline{CH}$

且$\because \angle 1=\angle 2$

$\therefore \angle EAF=\angle GCH$ 又$\overline{AE}=\overline{CG}$

(3)∴△AEF≅△CGH(SAS)

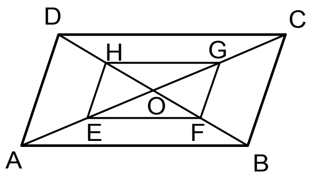
$\therefore \overline{EF}=\overline{GH}$

(4)同理可證$\overline{HE}=\overline{GF}$

(5)∴EFGH 為平行四邊形(兩雙對邊相等)

【範例七】

已知：▱ABCD 中，對角線$\overline{AC}$、$\overline{BD}$相交於 O，又 E、F、G、H 分別為$\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\overline{CO}$、$\overline{DO}$的中點。



求證：EFGH 為平行四邊形

證明：(1)∵ABCD 為平行四邊形

$\therefore \overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$

(2)∵E、F、G、H 分別為$\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\overline{CO}$、$\overline{DO}$的中點

$\therefore \overline{EO}=\frac{1}{2}\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{CO}=\overline{GO}$

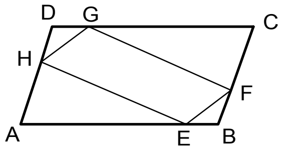
同理$\overline{HO}=\overline{FO}$

(3)∴EFGH 為平行四邊形（對角線互相平分）

【練習六】

已知：▱ABCD 中，$\overline{AE}=\overline{CG}$，$\overline{BF}=\overline{DH}$

求證：EFGH 為平行四邊形



證明：(1)∵ABCD 是平行四邊形

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$且$\angle A=\angle C$

(2)$\because \overline{DH}=\overline{BF}$

$\therefore \overline{AH}=\overline{AD}-\overline{DH}$

$=\overline{BC}-\overline{BF}=\overline{CF}$

又$\overline{AE}=\overline{CG}$

(3)∴△AEH≅△CGF(SAS)

$\therefore \overline{EH}=\overline{FG}$

(4)同理可證$\overline{EF}=\overline{HG}$

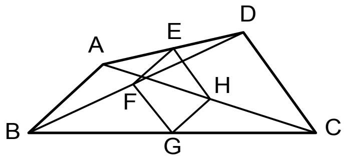
(5)∴EFGH 為平行四邊形（兩雙對邊相等）

【練習七】

已知：E、F、G、H 分別為$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的中點，

試證：(1)EFGH 為平行四邊形

(2)若$\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=14$，且$\angle ABC=45^{0}$，$\angle DCB=75^{0}$，求 EFGH 面積。



證明：(1)(i)$\overline{DE}=\overline{AE}$，$\overline{DF}=\overline{BF}$，

$\therefore \overline{EF}//\overline{AB}$，$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

同理$\overline{HG}//\overline{AB}$，$\overline{HG}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

(ii)$\therefore \overline{EF}//\overline{HG}$，$\overline{EF}=\overline{HG}$

∴EFGH 為平行四邊形

(2)$\angle HGC=\angle ABC=45^{0}$，

$\angle FGB=\angle DCB=75^{0}$，

$\therefore \angle FGH=180^{0}-45^{0}-75^{0}=60^{0}$，

∴四邊形 EFGH$=\overline{FG}\times\overline{HG}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=7\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=21\sqrt{3}$（平方單位）