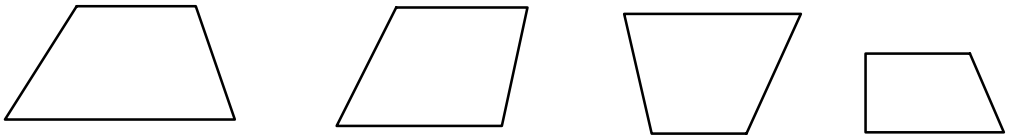
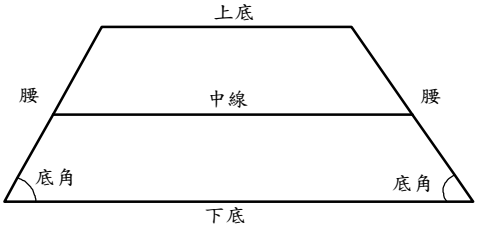
梯形

梯形的基本概念

梯形的定義:四邊形中，有一雙對邊平行，另一雙對邊不平行，則稱此四邊形為梯形。



名詞介紹:上底、下底、腰、中線、底角。



(1) 上底與下底：梯形中互相平行的兩邊，稱為上底與下底。

(2) 腰：不平行的兩邊稱為腰。

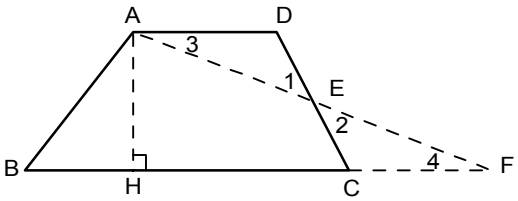
(3) 中線：連接兩腰中點的線段，稱為梯形的中線。

(4) 底角：兩腰與下底的夾角稱為底角。

梯形的面積$=\frac{1}{2}\times$(上底＋下底)$\times$高

以下我們用兩種不同方式來證明梯形的面積：

【方法一】將梯形化為三角形。



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$。

【求證】梯形 ABCD 面積$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$。

【證明】(1)取$\overline{CD}$之中點 E，作$\overrightarrow{AE}$交$\overrightarrow{BC}$於 F 點。

(2)由△ADE 與△CFE 中，$\because \overline{DE}=\overline{CE}$

∠1＝∠2(對頂角相等)、∠3＝∠4(內錯角相等)

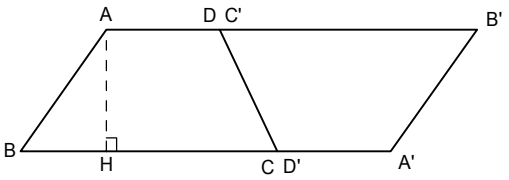
$\therefore$△ADE≅△FCE(ASA)　$\therefore \overline{AD}=\overline{CF}$

梯形 ABCD 面積＝△ABF$=\frac{1}{2}\times(\overline{BF})\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{CF}+\overline{BC})\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$

【方法二】利用兩個梯形組合成平行四邊形。



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$。

【求證】梯形 ABCD 面積$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$。

【證明】(1) 我們將梯形 ABCD 複製成梯形 A'B'C'D'，並將梯形 A'B'C'D'旋轉使得 C'點與 D 點，C 點與 D'點重合。則四邊形 ABA'B'為平行四邊形（兩雙對邊平行且相等）。

(2) 梯形 ABCD 面積$=\frac{1}{2}\times$▱ ABA'B'$=\frac{1}{2}\times(\overline{A'D'}+\overline{BC})\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AH}$

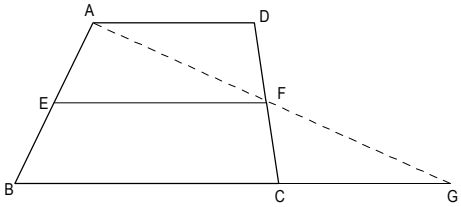
梯形的相關中線性質

【性質 1】**梯形的中線必平行於上下底，且其長等於上下底和的一半。**

【性質 2】**連接梯形兩對角線中點的線段，必平行於上下底，且其長等於兩差的一半。**

接著我們來證明以上這 2 個性質：

【性質 1】**梯形的中線必平行於上下底，且其長等於上下底和的一半。**



【已知】梯形 ABCD 中 E、F 分別為$\overline{AB}$、$\overline{CD}$之中點。

【求証】$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$，$\overline{EF}//\overline{AD}$，$\overline{EF}//\overline{BC}$

【証明】(1)連接$\overline{AF}$，並延長$\overline{AF}$交$\overline{BC}$的延長線於 G 點。

(2)在△ADF 和△GCF 中, ∠AFD＝∠GFC(對頂角相等)，

又$\overline{AD}//\overline{BC}\Rightarrow$∠ADF＝∠GCF(內錯角相等)，

且$\overline{EF}$為中線$\Rightarrow\overline{DF}=\overline{CF}$

∴△ADF≅△GCF(ASA 全等性質) $\Rightarrow\overline{AF}=\overline{GF}$，且$\overline{AD}=\overline{CG}$

(3)∵E 為$\overline{AB}$的中點，F 為$\overline{AG}$的中點

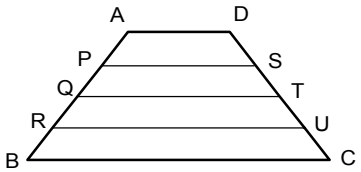
$\Rightarrow\overline{EF}//\overline{BG}$，$\overline{EF}=\frac{1}{2}\times\overline{BG}=\frac{1}{2}\times(\overline{CG}+\overline{BC})$ 【三角形中點連線性質】

∴$\overline{AD}//\overline{BC}$，且$\overline{AD}=\overline{CG}$

∴$\overline{EF}//\overline{AD}$，$\overline{EF}//\overline{BC}$，$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$

【範例】如圖梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，P、Q、R 四等分 $\overline{AB}$；S、T、U 四等分 $\overline{DC}$，

若 $\overline{AD}=12$，$\overline{BC}=30$，求 $\overline{PS}+\overline{QT}+\overline{RU}=$？



【解答】(1) $\because \overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RB}$，且 $\overline{DS}=\overline{ST}=\overline{TU}=\overline{UC}$

$\therefore \overline{AD}//\overline{PS}//\overline{QT}//\overline{RU}//\overline{BC}$

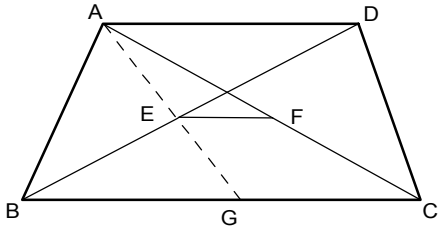
(2) $\overline{QT}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})=\frac{1}{2}(12+30)=21$

(3)同理 $\overline{QT}=\frac{1}{2}(\overline{PS}+\overline{RU})$　$\therefore \overline{PS}+\overline{RU}=42$

(4) $\therefore \overline{PS}+\overline{QT}+\overline{RU}=42+21=63$

【性質 2】**連接梯形兩對角線中點的線段，必平行於上下底，且其長等於兩差的一半。**

【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AD}$，E、F 分別為 $\overline{DB}$、$\overline{AC}$ 之中點。



【求證】(1) $\overline{EF}//\overline{AD}//\overline{BC}$

(2) $\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})$

【證明】(1) $\because \overline{AD}//\overline{BC}$，$\therefore \angle ADE=\angle GBE$(內錯角)，

又 $\overline{BE}=\overline{DE}$(E 為 $\overline{BD}$ 中點)，$\angle AED=\angle GEB$(對頂角)，

故 $\triangle AED\cong\triangle GEB$(ASA)，可得 $\overline{AE}=\overline{EG}$(對應邊)，

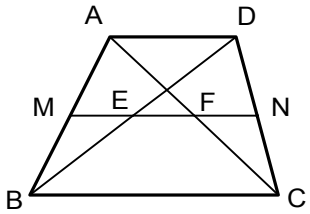
在 $\triangle AGC$ 中，$\overline{AE}=\overline{EG}$，$\overline{AF}=\overline{FC}$(F 為 $\overline{AC}$ 中點)，

故 $\overline{EF}//\overline{GC}$(三角形兩邊中點連線性質)，即 $\overline{EF}//\overline{AD}//\overline{BC}$

(2)由(1)可得 $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{GC}$

又 $\overline{GC}=\overline{BC}-\overline{BG}=\overline{BC}-\overline{AD}$，故 $\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})$

【範例】已知梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{BC}=2\overline{AD}$，M、N 分別為兩腰的中點。



【求證】$\overline{ME}=\overline{EF}=\overline{FN}$

【證明】(1) $\because \overline{AD}//\overline{BC}$ 且 M、N 分別為兩腰上的中點

$\therefore \overline{MN}//\overline{AD}//\overline{BC}$

(2)在△ABD 中，$\because \overline{ME}//\overline{AD}$，且 $\overline{AM}=\overline{BM}$

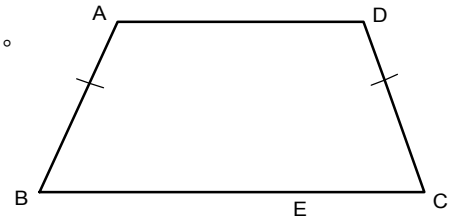
$\therefore \overline{BE}=\overline{ED}$　$\therefore \overline{ME}=\frac{1}{2}\overline{AD}$　同理 $\overline{NF}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

(3) $\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})=\frac{1}{2}(2\overline{AD}-\overline{AD})=\frac{1}{2}\overline{AD}$

(4) $\therefore \overline{ME}=\overline{EF}=\overline{FN}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

等腰梯形

1. **等腰梯形的定義**:兩腰相等的梯形。如圖，梯形 ABCD 中 $\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$，則稱四邊形 ABCD 為等腰梯形。



2. **等腰梯形的性質**:在小學我們已經學過以下等腰梯形的性質，現在我們一一來證明。

【性質 1】等腰梯形的兩底角相等。

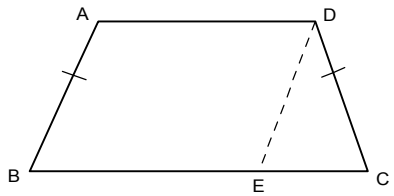
【性質 2】若一梯形的兩底角相等，則此梯形必為等腰梯形。

【性質 3】等腰梯形的兩對角線相等。

【性質 4】若一梯形的兩對角線相等，則此梯形必為等腰梯形。

Note:【性質 1】與【性質 2】互為等價，【性質 3】與【性質 4】也互為等價。

【性質 1】**等腰梯形的兩底角相等。**



【已知】等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【求證】∠B＝∠C。

【證明】(1)過 D 點作 $\overline{AB}$ 的平行線 $\overline{DE}$，交 $\overline{BC}$ 於 E。

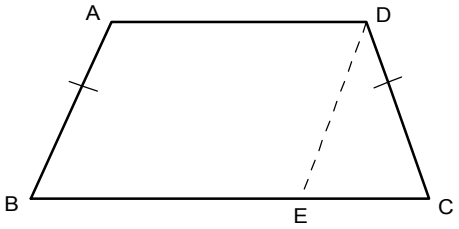
(2) $\because \overline{DE}//\overline{AB}$，$\overline{AD}//\overline{BE}$，∴ABED 為平行四邊形，$\therefore \overline{AB}=\overline{DE}$。

(3) $\because \overline{AB}=\overline{DC}$，$\therefore \overline{DE}=\overline{DC}$，即△DEC 為等腰三角形　∴∠DEC＝∠C。

(4) $\because \overline{AB}//\overline{DE}$，∴∠B＝∠DEC。

(5)由(3)與(4)可知∠B＝∠C。

【性質 2】**若一梯形的兩底角相等，則此梯形必為等腰梯形。**



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，∠B＝∠C。

【求證】$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【證明】(1)過 D 點作 $\overline{AB}$ 的平行線，交 $\overline{BC}$ 於 E。

(2) ∵$\overline{DE}//\overline{AB}$，$\overline{AD}//\overline{BE}$，

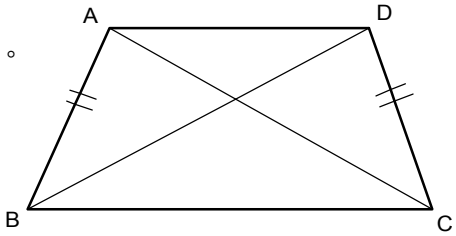
∴ABED 為平行四邊形，　∴$\overline{AB}=\overline{DE}$。

∵$\overline{DE}//\overline{AB}$　∴∠B＝∠DEC

(3) ∵∠B＝∠DEC＝∠C，即 ΔDEC 為等腰三角形

∴$\overline{DE}=\overline{DC}$ ⇒ $\overline{AB}=\overline{DC}$

【性質 3】**等腰梯形的兩對角線相等。**



【已知】在等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【求證】$\overline{AC}=\overline{BD}$。

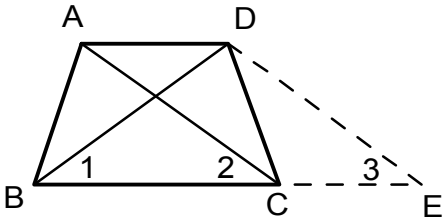
【證明】(1) ∵ABCD 為等腰梯形，∴∠ABC＝∠DCB。

(2) 在△ABC 與△DCB 中，

∵$\overline{AB}=\overline{DC}$，∠ABC＝∠DCB，$\overline{BC}=\overline{BC}$，

∴△ABC≅△DCB(SAS)　∴$\overline{AC}=\overline{BD}$。

【性質 4】**若一梯形的兩對角線相等，則此梯形必為等腰梯形。**



【已知】梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$。

【求證】$\overline{AB}=\overline{DC}$。

【證明】(1)過 D 點作 $\overline{DE}//\overline{AC}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 E 點，

∵$\overline{DE}//\overline{AC}$，$\overline{AD}//\overline{BC}$

∴四邊形 ACED 為平行四邊形⇒$\overline{DE}=\overline{AC}$

由△BDE 中，$\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{DE}$

∴∠1＝∠3∟∟(i)　∵$\overline{DE}//\overline{AC}$ ∴∠2＝∠3∟∟(ii)

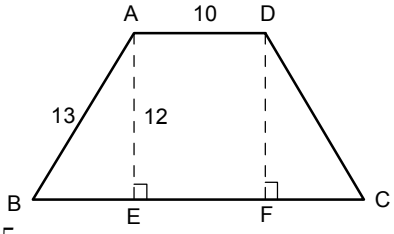
由(i)(ii)⇒∠1＝∠2

(2)在△ABC 與△DCB 中，∵$\overline{AC}=\overline{BD}$，∠1＝∠2，$\overline{BC}=\overline{BC}$，

∴△ABC≅△DCB(SAS)，∴$\overline{AB}=\overline{DC}$

梯形的相關應用：

【範例】等腰梯形腰長 13 公分，高 12 公分，上底長 10 公分，求其面積、周長及中線長。



【解說】(1)作 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 於 E，$\overline{DF} \perp \overline{BC}$ 於 F

$\therefore \overline{EF} = \overline{AD} = 10$

（2）∵ABCD 為等腰梯形　$\therefore \overline{BE} = \overline{CF} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

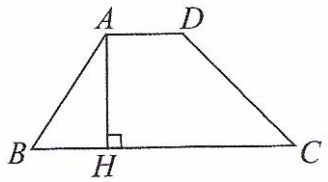
$\therefore \overline{BC} = 5 + 10 + 5 = 20$

（3）梯形面積＝$\frac{1}{2}(10+20)\times 12 = 180$（平方公分）

（4）周長＝$10+20+13\times 2 = 56$(公分)

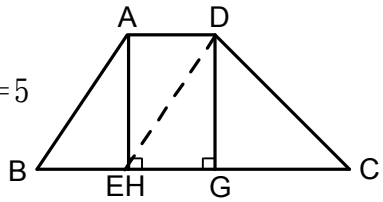
（5）中線長＝（10＋20）÷2＝15(公分)

【範例】如右圖， ABCD 為一梯形，已知上底 $\overline{AD} = 2$，下底 $\overline{BC} = 7$，兩腰 $\overline{AB} = 3$，$\overline{CD} = 4$，求此梯形的高 $\overline{AH}$ 的長度。



【解說】作 $\overline{DE} // \overline{AB}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E

∵ $\overline{AD} // \overline{BC}$，$\overline{DE} // \overline{AB}$　∴ABED 為平行四邊形

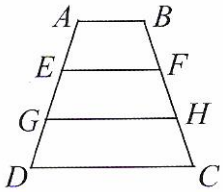


∴ $\overline{DE} = \overline{AB} = 3$，$\overline{BE} = \overline{AD} = 2$　∴ $\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = 7 - 2 = 5$

∵ΔDEC 之三邊長為 3、4、5　∴ΔDEC 為直角Δ

作 $\overline{DG} \perp \overline{BC}$ 於 G，則 $\overline{DG} = \overline{DE} \times \overline{DC} / \overline{CE} = \frac{3\times 4}{5} = \frac{12}{5} = \overline{AH}$

【範例】如右圖，梯形 ABCD 之高為 10，$\overline{AB} // \overline{CD}$，且 $\overline{AE} = \overline{EG} = \overline{GD}$，$\overline{BF} = \overline{FH} = \overline{HC}$，若 $\overline{EF} = 6$，$\overline{GH} = 8$，則梯形 ABCD 之面積為多少?



【解說】(1) ∵ $\overline{AE} = \overline{EG} = \overline{GD}$，且 $\overline{BF} = \overline{FH} = \overline{HC}$

$\therefore \overline{AB} // \overline{EF} // \overline{GH} // \overline{DC}$

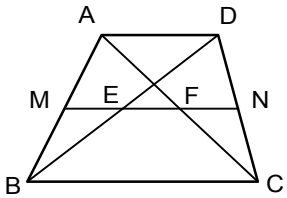
(2) $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{GH})$

$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2}(\overline{AB} + 8) \Rightarrow \overline{AB} = 4$

$\overline{GH} = \frac{1}{2}(\overline{EF} + \overline{DC}) \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}(6 + \overline{DC}) \Rightarrow \overline{DC} = 10$

∴梯形面積＝$(4+10)\times 10 \div 2 = 70$

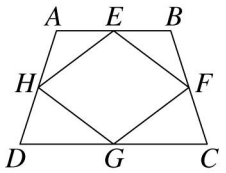
【範例】如右圖，梯形 $ABCD$，$\overline{CD}//\overline{AB}$ 且 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，$F$ 為對角線 $\overline{AC}$ 之中點，E 為對角線 $\overline{BD}$ 之中點，$\overline{EF}$ 分別交 $\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 於 M、N，若 $\overline{BC}=4$，則 $\overline{MN}$？



【解說】$\because \overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{BC}=4$　$\therefore \overline{AD}=2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})=\overline{MN} \Rightarrow \frac{1}{2}(2+4)=3$

【範例】等腰梯形ABCD中，已知 $\overline{AB}//\overline{CD}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$，E、F、G、H分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 的中點，那麼四邊形EFGH為何種四邊形？



【解說】連接 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$，$\because$ABCD為等腰梯形，$\therefore \overline{AC}=\overline{BD}$

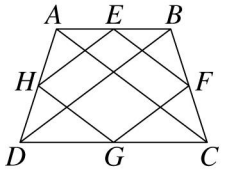
△ABD中，$\because$E、H為 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 中點

$\therefore \overline{EH}//\overline{BD}$，且 $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

同理 $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$，又同理 $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，$\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

$\because \overline{AC}=\overline{BD}$　$\therefore \overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

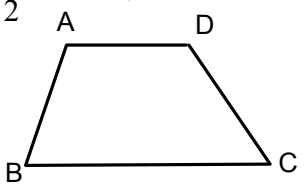
故四邊形EFGH為菱形

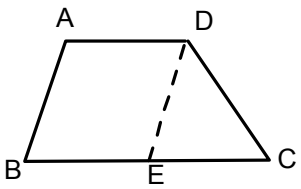


小　試　身　手

【範例一】

梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$，求∠A＝？





解答：(1)取 $\overline{BC}$ 的中點 E，連接 $\overline{DE}$

(2) $\because \overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{BE}$，又 $\overline{AD}//\overline{BC}$

∴ABED 為平行四邊形

$\therefore \overline{AB}=\overline{DE}=\overline{CD}=\overline{EC}$

∴△DEC 為正三角形 ∴∠C＝60^0

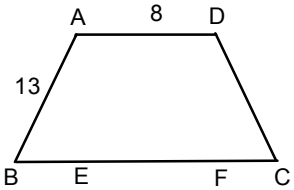
(3) $\because \overline{AB}=\overline{DC}$　∴ABCD 為等腰梯形

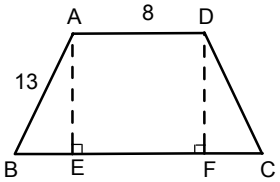
∴∠B＝∠C＝60^0

∴∠A＝120^0

【練習一】

等腰梯形腰長 13 公分，高 12 公分，上底長 8 公分，求其面積。





解答：(1)作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 於 E

$\overline{DF}\perp\overline{BC}$ 於 F

$\therefore \overline{EF}=\overline{AD}=8$

(2)∵ABCD 為等腰梯形

$\therefore \overline{BE}=\overline{CF}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

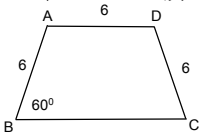
$\therefore \overline{BC}=5+8+5=18$

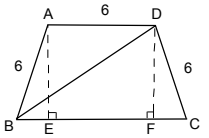
(3)梯形面積＝$\frac{1}{2}(8+18)\times 12$

＝156（平方公分）

【範例二】

一等腰梯形 ABCD 中，若 $\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{AD}=6$ 公分，$\angle ABC=60^0$，求對角線 $\overline{BD}$ 的長及此梯形的面積。





解答：(1)作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 於 E，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$ 於 F

(2)$\because\overline{AB}=6$，$\angle ABC=60^0$

$\therefore\overline{BE}=3$，$\overline{AE}=3\sqrt{3}$ $\because$ABCD 為等腰

$\therefore\overline{DF}=\overline{AE}=3\sqrt{3}$，$\overline{CF}=\overline{BE}=3$

(3)$\therefore\overline{BD}=\sqrt{\overline{DF}^2+\overline{BF}^2}$

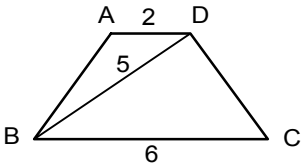
$=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+9^2}=6\sqrt{3}$

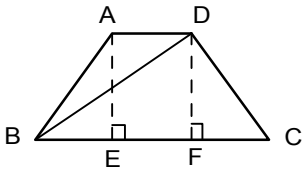
(4)ABCD 面積$=\frac{1}{2}$（6＋12）×$3\sqrt{3}$

$=27\sqrt{3}$（平方公分）

【練習二】

一等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，若 $\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=6$，$\overline{BD}=5$，求此梯形面積。





解答：(1)作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 於 E，$\overline{DF}\perp\overline{BC}$ 於 F

(2)$\overline{BE}=\overline{CF}=\frac{6-2}{2}=2$

$\therefore\overline{BF}=4$　$\because\overline{BD}=5$　$\therefore\overline{DF}=3$

(3)梯形 ABCD 面積$=\frac{1}{2}$（2＋6）×3

$=12$（平方單位）

【範例三】

已知一梯形的上底為 5，下底為 7，求：

(1)此梯形的中線長

(2)此梯形對角線中點所連成的線段長

解答：(1)中線長$=\frac{1}{2}$（5＋7）$=6$

(2)對角線中點連線段長$=\frac{1}{2}$（7－5）$=1$

【練習三】

梯形一底長 10 公分，連接對角線中點的線段長 4 公分，求另一底長

解答：設另一底長 x 公分，則

$\frac{1}{2}|x-10|=4$　$\therefore|x-10|=8$

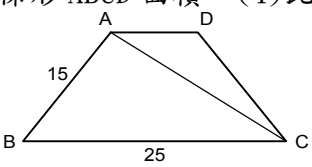
x－10＝8，x＝18 或 x－10＝－8，x＝2

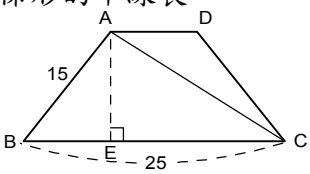
故另一底長 18 公分或 2 公分

【範例四】

如圖，等腰梯形 ABCD，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=15$，$\overline{BC}=25$，$\overline{AC}\perp\overline{AB}$，

求：(1)此梯形之高　(2)上底 $\overline{AD}$ 之長　(3)梯形 ABCD 面積　(4)此梯形的中線長。





解答：(1)(i)作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 於 E

$\because\overline{AB}=15$，$\overline{BC}=25$　$\therefore\overline{AC}=20$

(ii)$\therefore\overline{AE}=\frac{15\times20}{25}=12$

(2)(i)$\because\overline{AB}=15$，$\overline{AE}=12$.$\therefore\overline{BE}=9$

(ii)$\overline{AD}=25-2\times9=7$

(3)ABCD 面積$=\frac{1}{2}$（7＋25）×12＝192

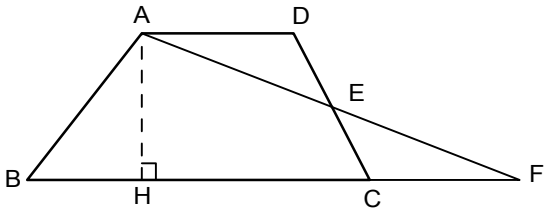
(4)中線長$=\frac{1}{2}$（7＋25）＝16

【練習四】

如圖梯形 ABCD 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，E 為 $\overline{CD}$ 中點，延長 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 的延長線於 F，若 ΔABF 面積為 36 平方公分，且其高為 9 公分，則：

(1)梯形 ABCD 面積為多少平方公分

(2) $\overline{AD}+\overline{BC}=$？



解答：(1) $\because\triangle AED\cong\triangle EFC$

$\therefore$ABCD 面積＝ΔABF 面積＝36(平方公分)

(2)$36=\frac{1}{2}$（$\overline{AD}+\overline{BC}$）×9

$\therefore\overline{AD}+\overline{BC}=8$（公分）

【範例五】

已知梯形高 10 公尺，中線長 8 公尺，求其面積。

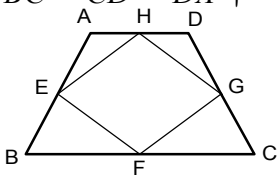
解答：面積＝中線長×高

＝8×10

＝80（平方公尺）

【練習五】

已知：ABCD 為等腰梯形，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，E、F、G、H 為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 中點



求證：EFGH 為菱形

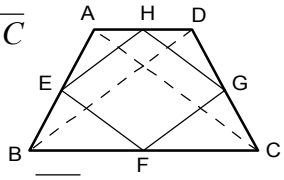
證明：(1)連接 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$

(2)在△ABD 中

∵E、H 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 中點

$\therefore \overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ 同理 $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

$\overline{EF}=\overline{HG}=\frac{1}{2}\overline{AC}$



(3)∵ABCD 為等腰梯形

$\therefore \overline{BD}=\overline{AC}$

(4)$\therefore \overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}$

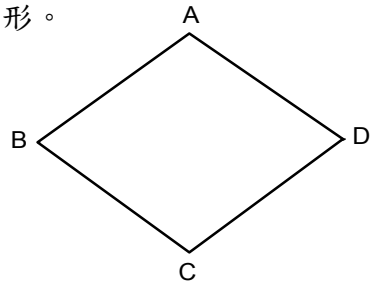
故 EFGH 為菱形

菱形與與鳶形

菱形的定義與性質

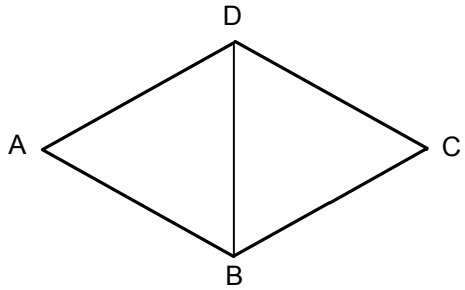
1. **菱形的定義**：四邊形的四邊都等長。如右圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CB}=\overline{CD}$

則 ABCD 稱為菱形。



2. **菱形的性質**：

平行四邊形的判別為四邊形兩雙對邊相等，菱形依其定義為四邊都相等，所以菱形是平行四邊形之一種特例，故平行四邊形的性質，菱形都具備。



【已知】菱形四個邊等長。

【求證】菱形為平行四邊形。

【證明】1. 在△ABD 與△CBD 中。

∵四個邊等長。

$\therefore \overline{AD}=\overline{CD}$、$\overline{AB}=\overline{CB}$、$\overline{DB}=\overline{DB}$

則△ABD≅△CBD(SSS)

2. △ABD 與△CBD 皆為等腰三角形。

∴∠ABD＝∠CDB、∠ADB＝∠CBD(內錯角相等)

$\Rightarrow \overline{AD}//\overline{CB}$、$\overline{AB}//\overline{CD}$

故可知菱形為平行四邊形。

菱形有下列六種性質，

其中（1）（2）（3）（4）項性質為平行四邊形與菱形皆有；（5）（6）項性質為菱形特有性質，平行四邊形不一定有此性質。

（1）一對角線平分原平行四邊形為兩個全等三角形。

（2）兩雙對邊相等。

（3）兩雙對角相等。

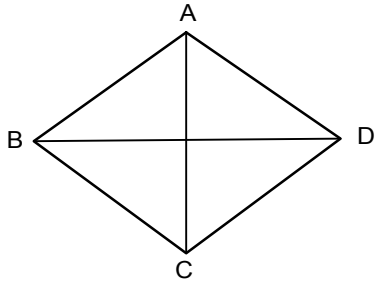
（4）兩對角線互相平分。

（5）菱形任一對角線會平分其頂角。

（6）菱形的兩對角線互相垂直平分。

前四項性質前面有關平行四邊形已經證明，在此僅證明後兩項菱形特有性質。

(5) 菱形任一對角線會平分其頂角



【已知】ABCD 為一菱形。

【求證】$\overline{AC}$ 平分 $\angle A$ 與 $\angle C$，$\overline{BD}$ 平分 $\angle B$ 與 $\angle D$。

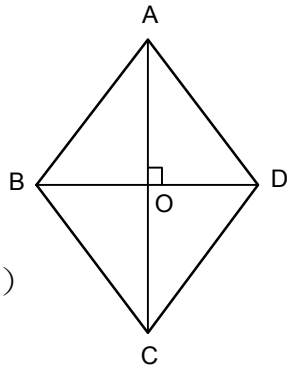
【證明】在△ABC 與△ADC 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$，

∴△ABC≅△ADC(SSS)，∴∠BAC＝∠DAC，∠BCA＝∠DCA，

即 $\overline{AC}$ 平分∠A 與∠C。 同理，$\overline{BD}$ 平分∠B 與∠D。

(6) 菱形的兩對角線互相垂直平分



【已知】在菱形 ABCD 中，O 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點。

【求證】$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$。

【證明】(1)在△ABO 與△CBO 中，

∵∠ABO＝∠CBO(由菱形任一對角線會平分其頂角)

且 $\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BO}=\overline{BO}$，

∴△ABO≅△CBO(SAS) ∴∠AOB＝∠COB。

(2)∵∠AOB＋∠COB＝180^0， ∴∠AOB＝∠COB＝90^0，∴ $\overline{AC}\perp\overline{BD}$。

(3)由(1)知，△ABO≅△CBO，∴ $\overline{AO}=\overline{CO}$。

(4)同理可證 $\overline{BO}=\overline{DO}$。

Note:(5)、(6)項性質，平行四邊形不一定成立。

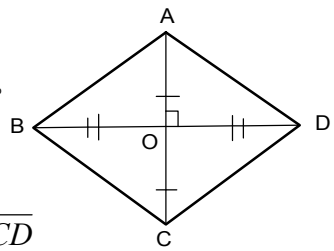
菱形的判別：我們如果已經知道以下其中一項判別性質，我們就可以說此四邊形是菱形。

1.若四邊形的兩對角線互相垂直平分，則這個四邊形一定是菱形。

2.若四邊形的兩對角線分別平分其內角，則此四邊形一定是菱形。

接著我們一一來證明：

1.若四邊形的兩對角線互相垂直平分，則這個四邊形一定是菱形。



【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$。

【求證】ABCD 為菱形。

【證明】(1)∵ $\overline{AC}$ 為 $\overline{BD}$ 的垂直平分線段，∴ $\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$

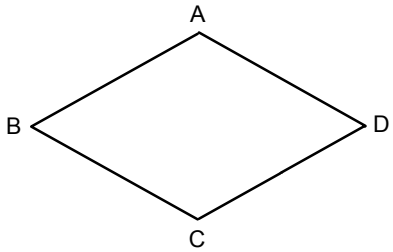
(2)∵ $\overline{BD}$ 為 $\overline{AC}$ 的垂直平分線段，∴ $\overline{BA}=\overline{BC}$，$\overline{DA}=\overline{DC}$

(3)由(1)與(2)得，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{CB}$ 即 ABCD 為菱形。

2.若四邊形的兩對角線分別平分其內角，則此四邊形一定是菱形。

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$ 平分 $\angle A$ 與 $\angle C$，$\overline{BD}$ 平分 $\angle B$ 與 $\angle D$。

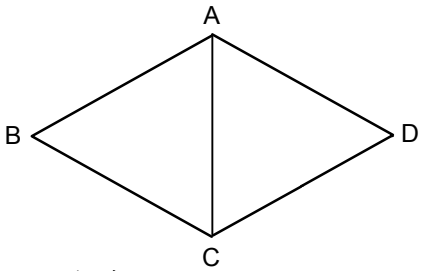
【求證】ABCD 為菱形。



【證明】(1)考慮△ABC 及△ADC，由 $\overline{AC}$ 平分∠A 與∠C，

∴∠BAC＝∠DAC，∠BCA＝∠DCA。

且 $\overline{AC}=\overline{AC}$，故△ABC≅△ADC(ASA)



∴ $\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$。

(2)同理可證 $\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{CD}$。

(3)由(1)與(2)可知，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{CD}$，∴ABCD 為菱形。

有關菱形的應用：

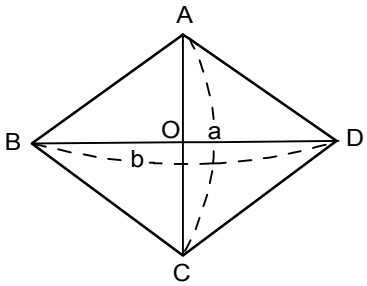
菱形的面積與周長的計算

- 菱形的兩對角線長分別為 a 與 b，則菱形面積＝$\frac{1}{2}$ab 。
- 菱形的兩對角線長分別為 a 與 b，則菱形周長＝$2\sqrt{a^2+b^2}$ 。

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CB}=\overline{CD}$。

【求證】四邊形 ABCD 面積＝$\frac{1}{2}$ab，且四邊形 ABCD 周長＝$2\sqrt{a^2+b^2}$ 。

【證明】∵四邊形 ABCD 為菱形且 O 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點。



∴ $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AO}=\overline{CO}=\frac{1}{2}$a，$\overline{BO}=\overline{DO}=\frac{1}{2}$b

四邊形 ABCD 面積＝△ABD＋△BCD

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BD}+\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{BD}$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times a\times b$$

四邊形 ABCD 周長＝$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD}$

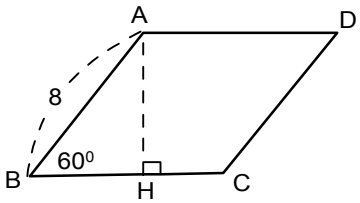
$$=4\overline{AB}=4\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

【範例】一菱形的兩對角線長分別為 10 公分及 24 公分，求此菱形的周長及面積。

【解答】(1) 菱形面積＝$\frac{1}{2}$ab＝$\frac{1}{2}$×10×24＝120（平方公分）

(2) 菱形周長＝$2\sqrt{a^2+b^2}$ ＝$2\sqrt{10^2+24^2}$ ＝2×26＝52

【範例】菱形的邊長為 8 公分，有一內角為 60^0，試求菱形的面積。



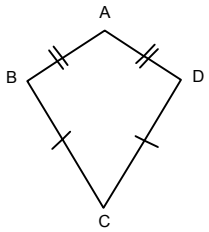
【解答】作 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 於 H，

則△ABH 為 30^0、60^0、90^0 的直角三角形，

$\because \overline{AB}=8 \quad \therefore \overline{AH}=4\sqrt{3}$

∴ABCD 面積＝$8\times4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$（平方公分）

從菱形的性質，我們知道四邊都相等的四邊形是菱形，但若只有兩雙鄰邊相等則稱為鳶(箏)形。如下圖。

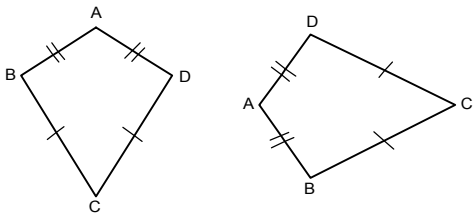


鳶(箏)形的定義與性質

1. **鳶(箏)形的定義**:兩雙鄰邊分別等長的四邊形，稱為鳶(箏)形。

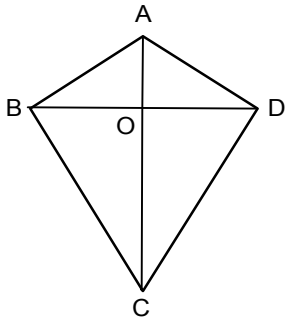
如圖，四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，則 ABCD 稱為鳶形。

(Note: $\overline{AB}=\overline{AD}\neq\overline{CB}=\overline{CD}$)



2. **鳶(箏)形的性質**:鳶形的對角線互相垂直，且其一對角線被另一對角線平分。

【已知】在四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$。



【求證】$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 且 $\overline{BO}=\overline{DO}$。

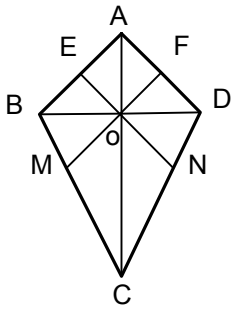
【證明】(1)$\because \overline{AB}=\overline{AD}$，∴A 在 $\overline{BD}$ 垂直平分線上。

(2)$\because \overline{CB}=\overline{CD}$，∴C 在 $\overline{BD}$ 的垂直平分線上。

(3)由(1)與(2)可知，$\overline{AC}$ 為 $\overline{BD}$ 的垂直平分線段，

$\therefore \overline{AC}\perp\overline{BD}$ 且 $\overline{BO}=\overline{DO}$。

【範例】

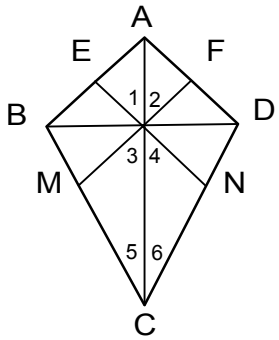


【已知】$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$，E、F 分別為 $\overline{AB}$，$\overline{AD}$ 的中點。

【求證】(1) AEOF 為菱形 (2)OMCN 為鳶形。

【證明】(1)(i) $\because \overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$

$\therefore$ABCD 為鳶形　$\therefore \overline{AC}\perp\overline{BD}$



(ii)在△AOB 中，∠AOB＝90^0，

且 $\overline{AE}=\overline{BE}$　$\therefore \overline{AE}=\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

同理 $\overline{AF}=\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

(iii) $\overline{AB}=\overline{AD}$

$\therefore \overline{AE}=\overline{EO}=\overline{FO}=\overline{AF}$　$\therefore$AEOF 為菱形

(2)(i)　$\therefore$∠1＝∠2，即∠3＝∠4

(ii) $\because$ABCD 為鳶形，$\therefore$△ABC≅△ADC

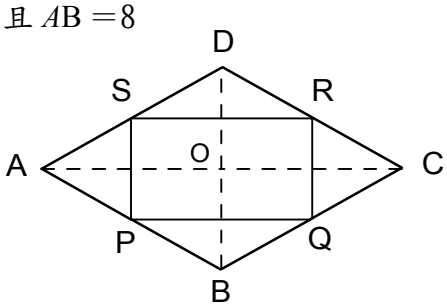
$\therefore$∠5＝∠6

(iii) 又 $\overline{OC}=\overline{OC}$，$\therefore$△OMC≅△ONC(ASA)

$\therefore \overline{OM}=\overline{ON}$，$\overline{MC}=\overline{NC}$，$\therefore$OMCN 為鳶形

【範例】ABCD 中，P、Q、R、S 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的中點，且 $\overline{AB}$＝8 公分，∠A＝60^0，求 (1) $\overline{BD}$ (2) $\overline{AC}$ (3) 矩形 PQRS 的周長及面積。

【解說】(1)$\because$△AOD 為 30^0、60^0、90^0的直角三角形，且 $\overline{AB}$＝8



$\therefore \overline{OB}=4$，$\overline{AO}=4\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{BD}=8$，$\overline{AC}=8\sqrt{3}$

$\therefore \overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}=4\sqrt{3}$，

$\overline{SP}=\frac{1}{2}\overline{BD}=4$

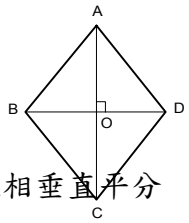
(2)$\therefore$PQRS 周長＝$8+8\sqrt{3}$

PQRS 面積＝$\overline{SR}\times\overline{SP}=4\sqrt{3}\times4=16\sqrt{3}$（平方公分）

小 試 身 手

【範例一】

ABCD 為菱形，若 $\overline{OB}=3$ 公分，ABCD 面積為 24 平方公分，求此菱形周長。



解答：(1)∵菱形的對角線會互相垂直平分

$\therefore \overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

$\therefore \overline{BD}=2\overline{BO}=2\times3=6$

(2)面積 $=\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AC}$

$24=\frac{1}{2}\times6\times\overline{AC}\quad \therefore \overline{AC}=8$

(3)周長 $=2\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{AC}^2}$

$=2\sqrt{6^2+8^2}=2\times10=20$(公分)

【練習一】

一菱形的兩對角線長分別為 12 公分及 16 公分，求此菱形的周長及面積。

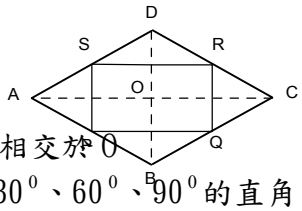
解答：(1)周長 $=2\sqrt{12^2+16^2}=2\times20$

$=40$（公分）

(2)面積 $=\frac{1}{2}\times12\times16=96$（平方公分）

【範例二】

ABCD 中，P、Q、R、S 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 的中點，且 $\overline{AD}=10$ 公分，$\angle A=60^0$，求矩形 PQRS 的面積。



解答：(1)設 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 相交於 O

(2) ∵△AOD 為 30^0、60^0、90^0 的直角三角形，且 $\overline{AD}=10$

$\therefore \overline{OD}=5$，$\overline{AO}=5\sqrt{3}$

即 $\overline{BD}=10$，$\overline{AC}=10\sqrt{3}$

$\therefore \overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}=5\sqrt{3}$，

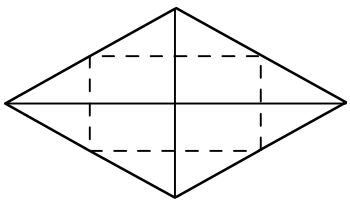
$\overline{SP}=\frac{1}{2}\overline{BD}=5$

(3) ∴PQRS 面積 $=\overline{SR}\times\overline{SP}$

$=5\sqrt{3}\times5=25\sqrt{3}$（平方公分）

【練習二】

已知菱形的一對角線長 7 公分，面積為 28 平方公分，求此菱形四邊中點連線，所形成新四邊形的周長。



解答：設菱形另一對角線長 x 公分，

則 $\frac{1}{2}\times7\times x=28$

$\therefore x=8$

新四邊形的周長＝兩對角線長之和

$=7+8=15$（公分）

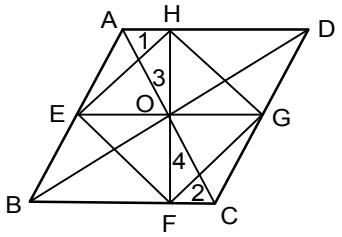
【範例三】

已知：ABCD 為平行四邊形，$\overline{EG}\perp\overline{HF}$

【練習三】

已知：△ABC 中，$\angle A=90^0$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{BF}$

求證：EFGH 為菱形



證明：(1) ∵ABCD 為平行四邊形

$\therefore \overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{BO}=\overline{DO}$

又 $\overline{AD}//\overline{BC}$　$\therefore \angle 1=\angle 2$

(2)在△AOH 與△COF 中

$\because \overline{AO}=\overline{CO}$

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

∴△AOH≅△COF(ASA)

$\therefore \overline{OH}=\overline{OF}$，同理 $\overline{OE}=\overline{OG}$

(3) ∴EFGH 為菱形

（對角線互相垂直平分）

【範例四】

已知：線段 a 和線段 b

求作：以 a 和 b 為兩對角線的菱形

a

b

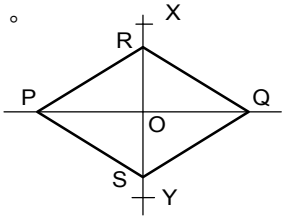
作法：(1)作 $\overline{PQ}$＝a

(2)作 $\overline{PQ}$ 的中垂線 $\overline{XY}$ 交 $\overline{PQ}$ 於 0

(3)以 0 為圓心，在 $\overline{XY}$ 上取

$\overline{OR}=\overline{OS}=\frac{1}{2}$b

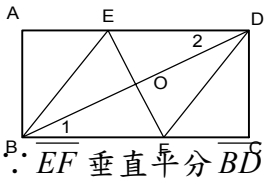
(4)連接 $\overline{PR}$、$\overline{RQ}$、$\overline{QS}$、$\overline{SP}$，則 PSQR 即為所求。



【範例五】

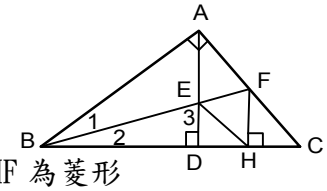
已知：ABCD 為矩形，$\overline{EF}$ 垂直平分 $\overline{BD}$

求證:(1)BEDF 為菱形　(2)若 $\overline{AB}$＝4，$\overline{BC}$＝8，求菱形 BEDF 面積



證明：(1)① ∵ $\overline{EF}$ 垂直平分 $\overline{BD}$

平分∠ABC，$\overline{FH}\perp\overline{BC}$



求證：AEHF 為菱形

證明：(1)在△ABF 與△DBE 中，

∵∠1＝∠2，∠A＝∠BDE＝90^0，

∴∠3＝∠AFE

(2)又∠3＝∠AEF

∴∠AEF＝∠AFE　$\therefore \overline{AE}=\overline{AF}$

(3) ∵∠1＝∠2

$\therefore \overline{AF}=\overline{FH}$　$\therefore \overline{AE}=\overline{FH}$

(4)又 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{FH}\perp\overline{BC}$

$\therefore \overline{AE}//\overline{FH}$

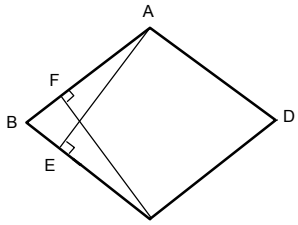
(5) ∴AEHF 為平行四邊形

且 $\overline{AE}=\overline{AF}$　∴AEHF 為菱形

【練習四】

已知：ABCD 為平行四邊形，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\overline{CF}\perp\overline{AB}$，$\overline{AE}=\overline{CF}$

求證：ABCD 為菱形



說明：(1) $\overline{AE}\perp\overline{BC}$，$\overline{CF}\perp\overline{AB}$

∴四邊形 ABCD 面積＝$\overline{BC}\times\overline{AE}$

＝$\overline{AB}\times\overline{CF}$

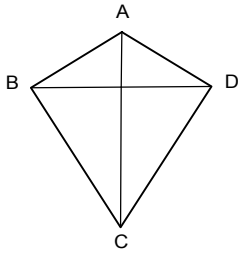
(2) $\because \overline{AE}=\overline{CF}$　$\therefore \overline{BC}=\overline{AB}$

(3) ∴ABCD 為菱形

【練習五】

已知:四邊形 ABCD 中 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AC}$ 平分 $\overline{BD}$

求證：ABCD 為鳶形



$\therefore \overline{BO}=\overline{DO}$

$\angle BOF=\angle EOD=90^0$

②$\because \overline{AD}//\overline{BC}$　$\therefore \angle 1=\angle 2$

③$\therefore \triangle BOF\cong\triangle DOE$(ASA)

$\therefore \overline{OE}=\overline{OF}$

$\therefore$BEDF 為菱形

(2)設$\overline{BF}=x$，$\overline{CF}=(8-x)$

$\therefore \overline{DF}^2=\overline{CF}^2+\overline{CD}^2$

$\therefore x^2=(8-x)^2+4^2$

$\Rightarrow x=5$

$\therefore$BEDF 面積$=5\times4=20$(平方單位)

證明：(1) $\because \overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AC}$平分$\overline{BD}$

$\therefore \overline{AC}$為$\overline{BD}$的垂直平分線

(2) $\therefore$由垂直平分線性質知：

$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$

$\therefore$ABCD 為鳶形