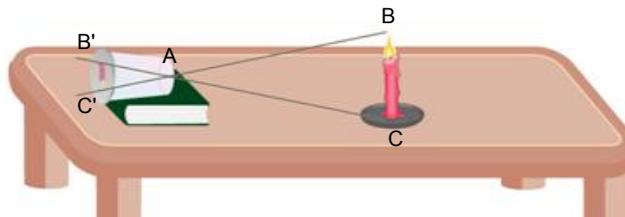


相似形

相似形的意義

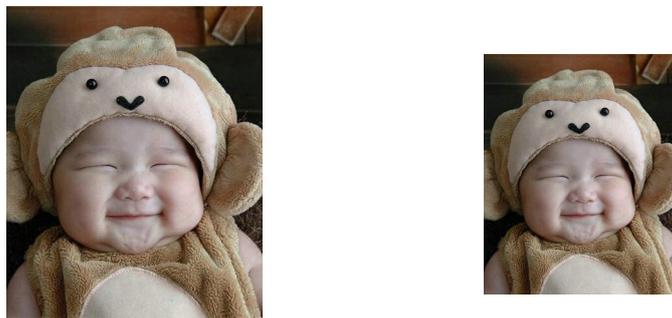
前面章節曾探討全等三角形一些幾何性質，自然界的圖形不全然都相等一樣的，就像小時候我們玩的汽車模型與真實汽車很明顯大小不一樣，卻很相似。

例如在理化課程「針孔成像」實驗中，如下圖，利用光的直線前進性質，可以產生蠟燭(\overline{BC})的針孔成像($\overline{B'C'}$)，而 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AB'C'$ 則彼此相似。



相似形的意義

兩個平面圖形不論其大小是否相等，只要形狀相同，即稱為這兩個平面圖形為相似形。例如：將一張圖片放大或縮小後所得的圖形，都與原來圖片相似，這些圖形叫做相似形，也就是說，把一個圖形按比例放大或縮小，就得出和它相似的圖形。



注意：若兩個圖形相似，則這兩個圖形未必全等。

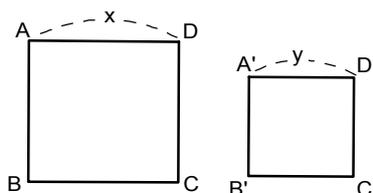
但若兩個圖形全等，則這兩個圖形必相似。

相似多邊形

相似多邊形的定義：兩個邊數相同的多邊形，同時滿足(1)對應角相等；(2)對應邊成比例，則這兩個多邊形是相似多邊形，簡稱相似形。我們以“ \sim ”作為相似符號。

任意正 n 邊形都是彼此相似的，以下我們來證明任何兩正方形及正五邊形為相似形

【範例】證明任何兩正方形為相似形。



上圖中四邊形 $ABCD$ 、 $A'B'C'D'$ 為兩正方形，其邊長分別為 x 、 y
 $\angle A$ 與 $\angle A'$ ， $\angle B$ 與 $\angle B'$ ， $\angle C$ 與 $\angle C'$ ， $\angle D$ 與 $\angle D'$ 為對應角

\overline{AB} 與 $\overline{A'B'}$ ， \overline{BC} 與 $\overline{B'C'}$ ， \overline{CD} 與 $\overline{C'D'}$ ， \overline{DA} 與 $\overline{D'A'}$ 為對應邊

因為四邊形 $ABCD$ 、 $A'B'C'D'$ 為兩正方形

所以 $\angle A = \angle A' = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle B' = 90^\circ$ ， $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ ， $\angle D = \angle D' = 90^\circ$

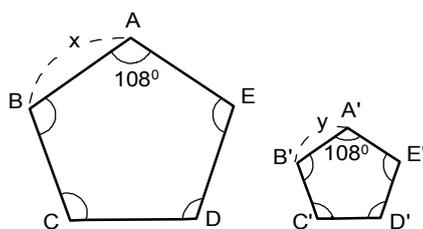
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x; \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'A'} = y$$

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{DA} : \overline{D'A'} = x : y$$

因為對應角相等，對應邊成比例，所以四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 相似，

記作四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 。

【範例】證明任何兩正五邊形為相似形



上圖中五邊形 $ABCDE$ 、 $A'B'C'D'E'$ 為兩正五邊形，其邊長分別為 x 、 y
 $\angle A$ 與 $\angle A'$ ， $\angle B$ 與 $\angle B'$ ， $\angle C$ 與 $\angle C'$ ， $\angle D$ 與 $\angle D'$ ， $\angle E$ 與 $\angle E'$ 為對應角

\overline{AB} 與 $\overline{A'B'}$ ， \overline{BC} 與 $\overline{B'C'}$ ， \overline{CD} 與 $\overline{C'D'}$ ， \overline{DE} 與 $\overline{D'E'}$ ， \overline{EA} 與 $\overline{E'A'}$ 為對應邊

因為五邊形 $ABCDE$ 、 $A'B'C'D'E'$ 為兩正五邊形

所以 $\angle A = \angle A' = 108^\circ$ ， $\angle B = \angle B' = 108^\circ$ ， $\angle C = \angle C' = 108^\circ$ ，

$$\angle D = \angle D' = 108^\circ，\angle E = \angle E' = 108^\circ$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = x; \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'A'} = y$$

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{DE} : \overline{D'E'} = \overline{EA} : \overline{E'A'} = x : y$$

因為對應角相等，對應邊成比例

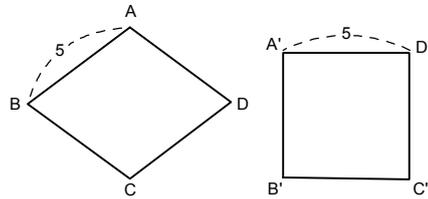
所以五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $A'B'C'D'E'$ 相似

記作五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $A'B'C'D'E'$

相似多邊形的判別

兩個多邊形（三角形除外）相似，需同時具有「對應角相等」，且「對應邊成比例」，才能確定這兩個多邊形相似。否則只滿足「對應角相等」或「對應邊成比例」其中一項都不能確定兩個多邊形相似，由下面範例得知。

【範例】菱形與正方形，雖然對應邊成比例，但對應角未必相等，故不一定相似。在下面的圖形中，菱形 ABCD 每邊都是 5，正方形 A'B'C'D' 每邊都是 5。



$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{DA} : \overline{D'A'} = 5 : 5 \text{ (對應邊成比例)}$$

$$\angle A \neq \angle A', \angle B \neq \angle B', \angle C \neq \angle C', \angle D \neq \angle D' \text{ (對應角不相等)}$$

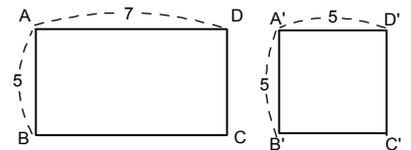
菱形 ABCD 與正方形 A'B'C'D' 不相似

【範例】矩形與正方形，雖然對應角相等，但對應邊未必成比例，故不一定相似。在下圖的長方形 ABCD 與正方形 A'B'C'D' 對應角都為 90° ，但是對應邊比例並不相同。

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = 5 : 5 \neq 7 : 5 = \overline{DA} : \overline{D'A'} \text{ (對應邊不成比例)}$$

$$\begin{aligned} \angle A = \angle A' = 90^\circ, \angle B = \angle B' = 90^\circ, \\ \angle C = \angle C' = 90^\circ, \angle D = \angle D' = 90^\circ \text{ (對應角相等)} \end{aligned}$$

矩形 ABCD 與正方形 A'B'C'D' 不相似



相似三角形

相似三角形則是比較特殊，兩三角形中，只需 (1) 對應角相等；或 (2) 對應邊成比例，則這兩三角形為相似三角形。(有關此性質，我們將在後面的單元證明。)

【範例】如右圖，說明 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$$\begin{aligned} \angle A = 67^\circ, \angle B = 30^\circ, \angle C = 83^\circ, \\ \angle A' = 67^\circ, \angle B' = 30^\circ, \angle C' = 83^\circ, \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = 2 \text{ 公分}, \overline{BC} = 1.9 \text{ 公分}, \overline{CA} = 1 \text{ 公分},$$

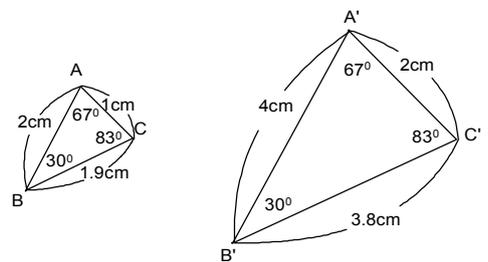
$$\overline{A'B'} = 4 \text{ 公分}, \overline{B'C'} = 3.8 \text{ 公分}, \overline{C'A'} = 2 \text{ 公分}。$$

由此，可以得到：

$$(1) \angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$

$$(2) \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CA} : \overline{C'A'}$$

所以 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 相似，記做 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



相似形的畫法：接下來我們利用比例線段來畫出三角形及四邊形的相似形。

【範例】利用比例線段畫出三角形 ABC 的 2 倍放大圖。

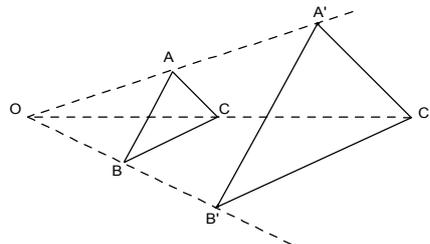
【解說】(1) 先於三角形 ABC 外部取一點 O，

作 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 於 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 上依次取 A'、B' 與 C' 三點，

使 $\overline{OA'} = 2\overline{OA}$ ， $\overline{OB'} = 2\overline{OB}$ ， $\overline{OC'} = 2\overline{OC}$ 。

(2) 連接 $\overline{A'B'}$ 、 $\overline{B'C'}$ 、 $\overline{C'A'}$

則 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



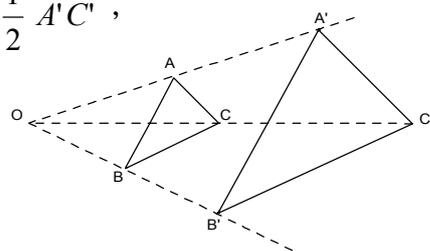
【範例】證明三角形 A'B'C' 為三角形 ABC 的 2 倍放大圖。

【證明】以 $\triangle A'OC'$ 中，

因為 A 為 $\overline{OA'}$ 的中點，C 為 $\overline{OC'}$ 的中點，所以 $\overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{A'C'}$ ，

同理可證， $\overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{A'B'}$ ， $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{B'C'}$

所以 $\triangle A'B'C' = 2\triangle ABC$ ，故得証。



【範例】利用比例線段畫出四邊形 ABCD 的 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖。

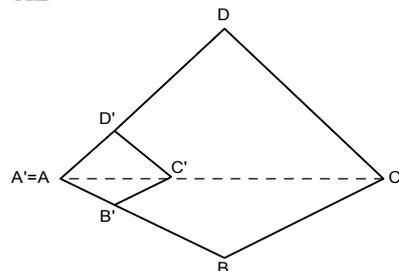
【解】(1) 先取 A' 點與 A 點重合，連接 \overline{AC} ，在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{AD}

上依次取 B'、C' 與 D' 三點，

使 $\overline{AB'} = \frac{1}{3} \overline{AB}$ ， $\overline{AC'} = \frac{1}{3} \overline{AC}$ ， $\overline{AD'} = \frac{1}{3} \overline{AD}$ 。

(2) 連接 $\overline{C'D'}$ 、 $\overline{B'C'}$

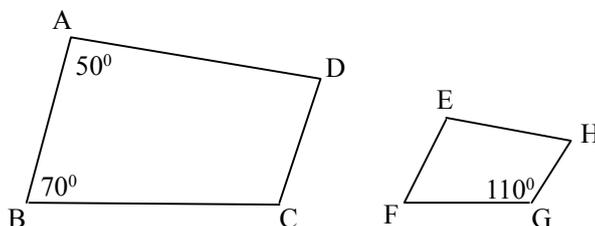
則四邊形 $ABCD \sim A'B'C'D'$ 。



相似形的相關應用：

【範例—對應角相等】

若四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ ，且 $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ， $\angle G = 110^\circ$ ，則 $\angle D$ 為多少度？



【解】

∵ 四邊形 ABCD ~ 四邊形 EFGH

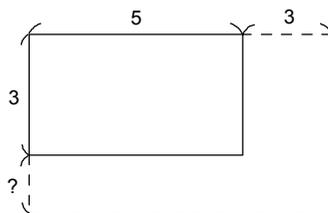
∴ 對應角相等即 $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, $\angle C = \angle G$, $\angle D = \angle H$

又四邊形 ABCD 內角和 = $50^\circ + 70^\circ + 110^\circ + \angle D = 360^\circ$

∴ $\angle D = 130^\circ$

【範例一對應邊成比例】

如右圖，一個長方形長為 5，寬為 3，若將長增加 3，則寬要增加多少，所得的新長方形與原長方形會相似。



【解】

假設寬要增加 x

∴ 新長方形與原長方形相似

∴ 對應邊成比例

$$\Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{5+3}{3+x} \Rightarrow x = \frac{9}{5}$$

∴ 寬要增加 $\frac{9}{5}$ ，所得的新長方形與原長方形會相似。

【範例】如下圖，設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 相似，且 $\overline{AB} = 5x - 3$, $\overline{AC} = 2x + 3$, $\overline{BC} = 15$,

$$\overline{DE} = 3x - 1, \overline{EF} = 2x + 4, \overline{DF} = 6,$$

求：(1) $x = ?$ (2) $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的周長

【解】

(1) ∵ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{5x-3}{3x-1} = \frac{2x+3}{6}$$

$$\therefore 6(5x-3) = (3x-1)(2x+3)$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 23x + 15 = 0,$$

$$(6x-5)(x-3) = 0$$

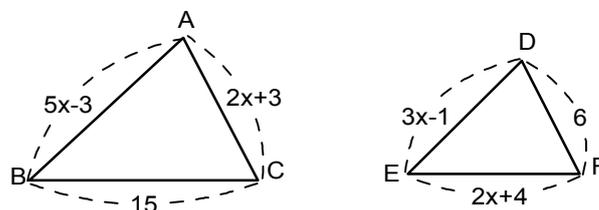
$$\therefore x = \frac{5}{6} \text{ (代入不合) 或 } 3$$

(2) $\triangle ABC$ 的周長 = $5x - 3 + 2x + 3 + 15$

$$= 7x + 15 = 7 \times 3 + 15 = 36$$

$\triangle DEF$ 的周長 = $3x - 1 + 6 + 2x + 4$

$$= 5x + 9 = 5 \times 3 + 9 = 24$$



【範例】兩長方形 $ABCD$ 、 $ECGF$ 為相似形，且 \overline{AD} 的對應邊為 \overline{EF} 。若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{FG} = 4$ ， $\overline{BG} = 25$ ，則兩長方形的面積和為何？

【解答】

$$\overline{AB} = \overline{DC}, \overline{EC} = \overline{FG}$$

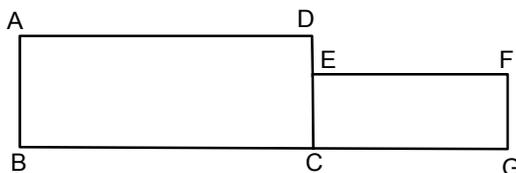
$$\therefore \overline{AB} : \overline{EC} = 6 : 4 = 3 : 2$$

Q 兩長方形為相似形

$$\therefore \overline{BC} : \overline{CG} = 3 : 2$$

$$\text{即 } \overline{BC} = 25 \times \frac{3}{5} = 15; \overline{CG} = 25 \times \frac{2}{5} = 10$$

因此兩長方形的面積和 $= 6 \times 15 + 4 \times 10 = 90 + 40 = 130$



【範例】兩直角三角形 ABC 、 DEF 為相似形，且 \overline{BC} 的對應邊為 \overline{CE} 。若 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{BE} = 3$ ， $\overline{AD} = 30$ ，則兩長方形的面積和為何？

【解答】

⊕ 直角三角形 ABC 、 DEF 為相似形

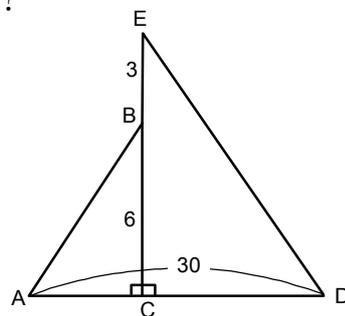
$$\therefore \overline{BC} : \overline{CE} = 6 : (6 + 3) = 6 : 9 = 2 : 3$$

$$\Rightarrow \overline{AC} : \overline{CD} = 2 : 3$$

$$\text{即 } \overline{AC} = 30 \times \frac{2}{5} = 12; \overline{CD} = 30 \times \frac{3}{5} = 18$$

$$\text{因此兩直角三角形的面積和} = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 + \frac{1}{2} \times 18 \times 9$$

$$= 36 + 81 = 117$$





小 試 身 手

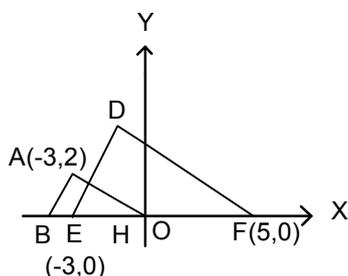
【範例一】

判斷下列圖形是否相似？（填是、否）

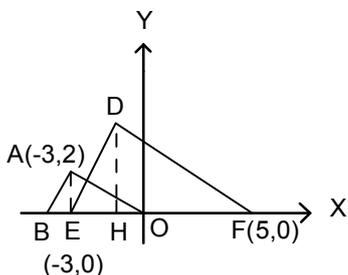
- (1) 任意兩個正三角形：__是__
- (2) 任意兩個正方形：__是__
- (3) 任意兩個等腰三角形：__否__
- (4) 任意兩個直角三角形：__否__
- (5) 任意兩個等腰直角三角形：__是__
- (6) 任意兩個圓形：__是__
- (7) 任意兩個長方形：__否__
- (8) 任意兩個菱形：__否__
- (9) 任意兩個等腰梯形：__否__
- (10) 任意兩個正六邊形：__是__

【範例二】

如圖，若 $\triangle ABO \sim \triangle DEF$ ，則D點座標為何？



解答：



過D點作 $\overline{DH} \perp \overline{EF}$

$\because \triangle ABO \sim \triangle DEF$

$$\Rightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{\overline{DH}}{2}$$

$$\therefore \overline{DH} = 4$$

$$\text{又 } \frac{2}{1} = \frac{\overline{EH}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{EH} = 2$$

$\Rightarrow \overline{HO} = 1$ 且D點在第二象限

$$\therefore D(-1, 4)$$

【練習一】

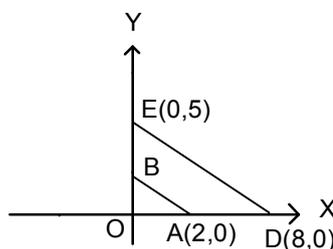
判斷下列敘述是否正確？（填○、X）

- (1) 相似的兩多邊形，其對應角必相等。
- (2) 相似的兩多邊形，其對應邊長必成比例。
- (3) 對應角相等的兩個三角形必相似。
- (4) 對應邊長成比例的兩個三角形必相似。
- (5) 對應角相等的兩個多邊形必相似。
- (6) 對應邊長成比例的兩個多邊形必相似。

解答：(1) ○ (2) ○ (3) ○
(4) ○ (5) X (6) X

【練習二】

如圖，若 $\triangle OAB \sim \triangle ODE$ ，則B點座標為何？



解答：

$\because \triangle OAB \sim \triangle ODE$

$$\Rightarrow \text{對應邊成比例 即 } \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{y}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

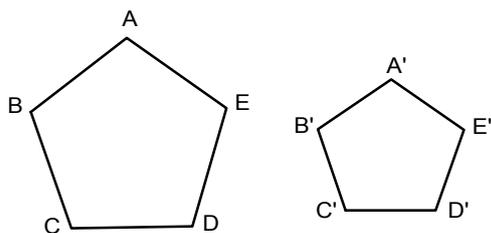
$$\therefore B\left(0, \frac{5}{4}\right)$$

【範例三】

任兩個正五邊形必相似，試證之。

已知：正五邊形 ABCDE 與正五邊形 A'B'C'D'E'

求證：正五邊形 ABCDE ~ 正五邊形 A'B'C'D'E'



證明：(1) 多邊形 ABCDE 是正五邊形
 $\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 108^\circ$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$$

(2) 多邊形 A'B'C'D'E' 是正五邊形

$$\Rightarrow \angle A' = \angle B' = \angle C' = \angle D' = \angle E' = 108^\circ$$

$$\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'A'}$$

(3) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle A' = \angle B' = \angle C' = \angle D' = \angle E'$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$$

(4) \therefore 正五邊形 ABCDE ~ 正五邊形 A'B'C'D'E'

【範例四】

設 ABCDE 與 A'B'C'D'E' 為兩相似的五邊形且知 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DE} : \overline{EA} = 1 : 2 : 4 : 3 : 2$ ，A'B'C'D'E' 周長為 36 公分，試分別求 \overline{CD} 的對應邊 $\overline{C'D'}$ ， \overline{AE} 的對應邊 $\overline{A'E'}$ 之長。

解答：

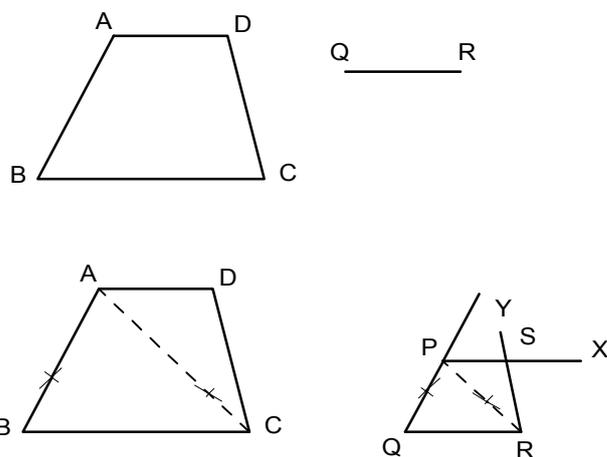
$$(1) \because ABCDE \sim A'B'C'D'E' \\ \therefore \overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{C'D'} : \overline{D'E'} : \overline{E'A'} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DE} : \overline{EA} = 1 : 2 : 4 : 3 : 2$$

$$(2) \text{ 設 } \overline{A'B'} = x \text{ 公分, } \overline{B'C'} = 2x \text{ 公分, } \overline{C'D'} = 4x \text{ 公分, } \overline{D'E'} = 3x \text{ 公分, } \overline{E'A'} = 2x \text{ 公分} \\ \therefore x + 2x + 4x + 3x + 2x = 36 \\ 12x = 36 \quad x = 3 \\ \therefore \overline{C'D'} = 4 \times 3 = 12 \text{ 公分} \\ \overline{E'A'} = 2 \times 3 = 6 \text{ 公分}$$

【練習三】

如圖，ABCD 為一梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， \overline{QR} 為一已知線段

求作：梯形 PQRS 使與梯形 ABCD 相似且 $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (寫出作法及作圖，不必證明)



作法：(1) 連接 \overline{AC}
 (2) 以 \overline{QR} 為一邊，作 $\triangle PQR$ 使 $\angle Q = \angle B$ ， $\angle PRQ = \angle ACB$
 (3) 過 P 點作 \overline{QR} 的平行線 \overline{SX}
 (4) 以 R 為頂點， \overline{RP} 為一邊，作 $\angle YRP = \angle DCA$
 設 \overline{PX} 與 \overline{YR} 交於 S，則 PQRS 為所求。

【練習四】

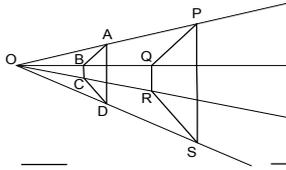
設 CDABF 與 GIKNM 為相似的五邊形，且知 $\angle C : \angle D : \angle A : \angle B = 2 : 3 : 2 : 1$ ， $\angle F = 140^\circ$ ，試分別求 $\angle D$ 的對應角 $\angle I$ 及 $\angle A$ 的對應角 $\angle K$ 之度數。

解答：

$$(1) \because CDABF \sim GIKNM \\ \therefore \angle I = \angle D, \angle K = \angle A \\ (2) \because \angle C : \angle D : \angle A : \angle B = 2 : 3 : 2 : 1 \\ \therefore \text{設 } \angle C = 2x^\circ, \angle D = 3x^\circ, \angle A = 2x^\circ, \angle B = x^\circ, \text{ 又 } \angle F = 140^\circ \\ (3) \text{ 又五邊形內角和} = (5-2) \times 180^\circ = 540^\circ \\ \therefore 2x + 3x + 2x + x + 140 = 540, 8x = 400 \\ \Rightarrow x = 50 \\ \therefore \angle I = \angle D = 50^\circ \times 3 = 150^\circ \\ \angle K = \angle A = 50^\circ \times 2 = 100^\circ$$

【範例五】

如圖，請分別在 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 、 \overline{OD} 的延長線上做點 P、Q、R、S 使四邊形 PQRS 與 ABCD 相似且 $\overline{AB} : \overline{PQ} = 1 : 2$ (不必證明)

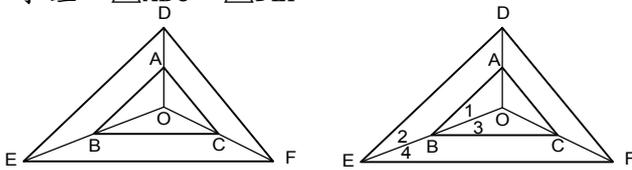


作法：

- 在 \overline{OA} 的延長線上取 $\overline{AP} = \overline{OA}$ ，
- 在 \overline{OB} 的延長線上取 $\overline{BQ} = \overline{OB}$
- 在 \overline{OC} 的延長線上取 $\overline{CR} = \overline{OC}$
- 在 \overline{OD} 的延長線上取 $\overline{DS} = \overline{OD}$
- 連接 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 、 \overline{RS} 、 \overline{SP} ，
- 則四邊形 PQRS 為所求

【範例六】

如圖， $\overline{OD} = 2\overline{OA}$ ， $\overline{OE} = 2\overline{OB}$ ， $\overline{OF} = 2\overline{OC}$ 。
求證： $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



證明：(1) $\because \overline{OD} = 2\overline{OA} \therefore \overline{OA} = \overline{AD}$ ，
即 A 為 \overline{OD} 中點，

同理：B 為 \overline{OE} 中點，C 為 \overline{OF} 中點

$$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DE} \text{， 且 } \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{DE} \text{，}$$

$$\overline{BC} \parallel \overline{EF} \text{， 且 } \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{EF}$$

$$\overline{CA} \parallel \overline{FD} \text{， 且 } \overline{CA} = \frac{1}{2} \overline{FD}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF} = \overline{CA} : \overline{FD}$$

(2) 在 $\triangle ODE$ 中 $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \therefore \angle 1 = \angle 2$

同理 $\angle 3 = \angle 4$

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle DEF$$

同理可證： $\angle BCA = \angle EFD$ ，

$$\angle CAB = \angle FDE$$

(3) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中

$$\because \angle ABC = \angle DEF \text{， } \angle BCA = \angle EFD \text{，}$$

$$\angle CAB = \angle FDE$$

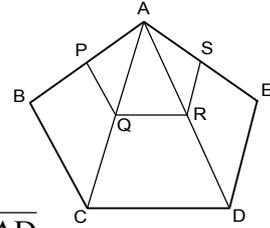
$$\text{且 } \overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF} = \overline{CA} : \overline{FD}$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

【練習五】

已知：五邊形 ABCDE

求作：五邊形 APQRS，使五邊形 APQRS 與 ABCDE 相似且 $\overline{PQ} : \overline{BC} = 1 : 2$ (不必證明)

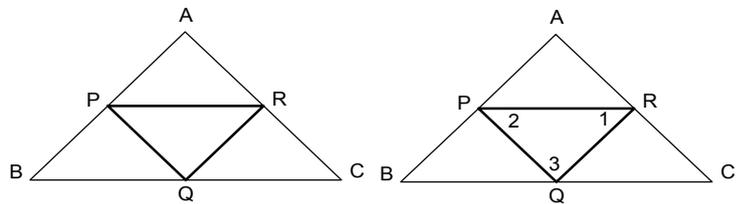


作法：

- (1) 連接 \overline{AC} 、 \overline{AD}
- (2) 分別取 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{AD} 、 \overline{AE} 的中點 P、Q、R、S
- (3) 連接 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 、 \overline{RS} ，
則五邊形 APQRS 為所求。

【練習六】

如圖， $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$
求證：(1) P、Q、R 是 $\triangle ABC$ 三邊的中點。
(2) $\triangle QRP \sim \triangle ABC$



證明：

(1) $\because \overline{PR} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$

$\therefore BQRP$ 是平行四邊形

$$\Rightarrow \overline{PR} = \overline{BQ}$$

同理： $PQCR$ 是平行四邊形

$$\Rightarrow \overline{PR} = \overline{QC} \quad \therefore \overline{BQ} = \overline{QC}$$

故 Q 為 \overline{BC} 的中點

同理可證：P 是 \overline{AB} 的中點，

R 是 \overline{AC} 的中點。

(2) $\because BQRP$ 是平行四邊形 $\therefore \angle 1 = \angle B$

同理： $\angle 2 = \angle C$ ， $\angle 3 = \angle A$

又 \because P、Q、R 是 $\triangle ABC$ 三邊的中點

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AC} \text{，}$$

$$\overline{PQ} : \overline{AC} = 1 : 2 = \overline{QR} : \overline{AB} = \overline{PR} : \overline{BC}$$

$$\Rightarrow \triangle QRP \sim \triangle ABC$$

比例線段

前一節已經介紹過相似形，我們知道相似形條件需要：對應角相等、對應線段成比例。此章節我們將利用平行關係與相似性質來得知比例線段。

當一些線段的長度成比例式時，例如， $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$ ， $\overline{AD}:\overline{BC}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{EF}:\overline{FD}$ ，我們就稱這些線段形成**比例線段**。以下我們就來證明平行線截比例線段：

【已知】設直線 M_1 、 M_2 與三條平行線 L_1 、 L_2 、 L_3 分別交於 A、B、C 及 D、E。

【求證】 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{ED}$ 。

【證明】 $\because \triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ 斜率相同，

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}} = \frac{x+y}{\sqrt{(n+m)^2-(x+y)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{n^2-x^2} = \frac{(x+y)^2}{(n+m)^2-(x+y)^2}$$

$$\Rightarrow x^2(n^2+2nm+m^2-x^2-2xy-y^2) = (x^2+2xy+y^2)(n^2-x^2)$$

$$\Rightarrow x^2n^2+2x^2nm+x^2m^2-x^4-2xyx^2-y^2x^2$$

$$= x^2n^2+2xyn^2+y^2n^2-x^4-2xyx^2-y^2x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2nm+x^2m^2=2xyn^2+y^2n^2$$

$$\text{同除 } m^2 \Rightarrow 2x^2 \frac{n}{m} + x^2 = 2xy \left(\frac{n}{m}\right)^2 + y^2 \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

$$\text{同除 } x^2 \Rightarrow 2 \frac{n}{m} + 1 = 2 \frac{y}{x} \left(\frac{n}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

$$\text{令 } p = \frac{n}{m}, q = \frac{y}{x}$$

$$2p+1=2qp^2+q^2p^2$$

$$q^2p^2-1+2qp^2-2p=0$$

$$(qp-1)(qp+1)+2p(qp-1)=0$$

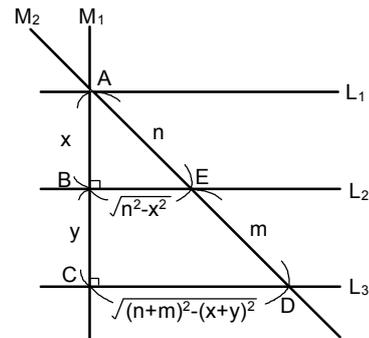
$$(qp-1)(qp+1+2p)=0$$

$$\because p>0, q>0$$

$$\therefore qp=1, p=\frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{x}{y} \Rightarrow n:m=x:y$$

$$\Rightarrow \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{ED}。$$



※由上面證明結果可知：

如果兩直線被三條(或三條以上的)平行直線所截，那麼與第一條直線所截得的各線段長度的比，必與第二條直線所截出的各線段長度的比相等，此稱為平行線截比例線段性質。以下我們就來看三角形截比例線段性質：

三角形兩邊截成比例線段性質

【性質1】一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交則此直線把這兩邊截成比例線段。

【性質2】若一直線把三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。

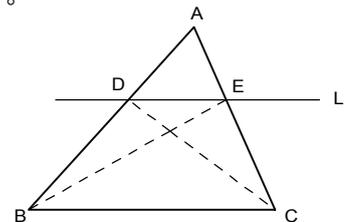
以下是有關此兩個性質的證明：

【性質1】一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交則此直線把兩邊截成比例線段

【已知】在 $\triangle ABC$ 中， $L \parallel \overline{BC}$ ，且 L 交 \overline{AB} 於 D 點，交 \overline{AC} 於 E 點。

【求證】 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 。

【證明】(1)連接 \overline{BE} 。



(2) $\triangle ADE$ 與 $\triangle BDE$ 分別以 \overline{AD} 與 \overline{DB} 為底時， E 為共同頂點，

所以它們的高同為由 E 點到 \overline{AB} 的距離。

即 $\triangle ADE$ 與 $\triangle BDE$ 為等高。

(3) $\because \triangle ADE$ 與 $\triangle BDE$ 為等高，

$$\therefore \triangle ADE : \triangle BDE = \overline{AD} : \overline{DB}$$

(4)同理，連接 \overline{CD} 可得，

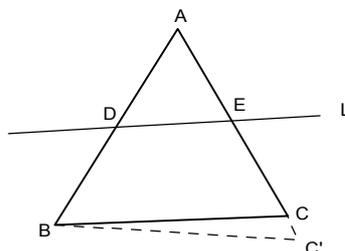
$$\triangle ADE : \triangle CDE = \overline{AE} : \overline{EC}$$

(5) $\triangle BDE$ 與 $\triangle CDE$ 共用底邊 \overline{DE} ， $L \parallel \overline{BC}$ ，所以這兩個三角形等高，

因此 $\triangle BDE = \triangle CDE$

(6)由(3)、(4)與(5)可知 $\Rightarrow \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$

【性質2】若一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。



【已知】直線L交 \overline{AB} 於D點，交 \overline{AC} 於E點，且 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 。

【求證】 $L // \overline{BC}$

【證明】(1)過B點作直線L的平行線 $\overline{BC'}$ ，交 \overline{AC} 於C'點。

$$(2) \because L // \overline{BC'}, \therefore \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC'}$$

$$\therefore \overline{EC'} = \frac{\overline{DB} \times \overline{AE}}{\overline{AD}}$$

$$(3) \because \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC},$$

$$\therefore \overline{EC} = \frac{\overline{DB} \times \overline{AE}}{\overline{AD}}$$

$$(4) \text{由(2)與(3)可知 } \overline{EC} = \overline{EC'},$$

\therefore C點與C'點重合。

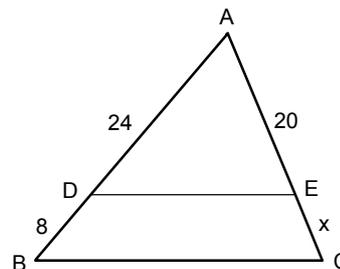
$$\therefore L // \overline{BC}。$$

【範例】如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，求x為多少？

【解說】 $\because \overline{DE} // \overline{BC}$

$$\therefore \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$$

$$\Rightarrow 24 : 8 = 20 : x \quad \therefore x = \frac{20}{3}$$



比例線段的相關應用

【已知】設直線 L_1 、 L_2 與三條平行線 M_1 、 M_2 、 M_3 分別交於A、B、C及D、E、F。

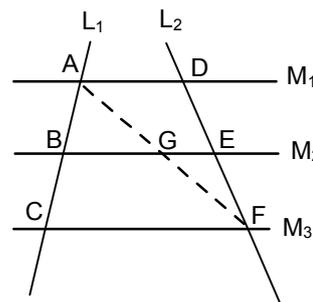
【求證】 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$ 。

【證明】(1)連接 \overline{AF} 線段，在 \overline{BE} 線段上交於一點G。

$$(2) \text{在 } \triangle ACF \text{ 中，} \therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AG} : \overline{GF},$$

$$\text{在 } \triangle ADF \text{ 中，} \therefore \overline{DE} : \overline{EF} = \overline{AG} : \overline{GF},$$

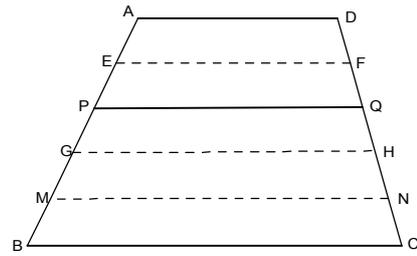
$$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$$



【範例】如下圖，ABCD為梯形，P為 \overline{AB} 上一點，又設 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ ， $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，Q在 \overline{CD} 上。

【試證】 $\overline{DQ} : \overline{QC} = \overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ 。

【證明】(1)設E為 \overline{AP} 的中點，則 $\overline{AE} = \overline{EP}$ 。



(2)把 \overline{PB} 三等分，得分點G與M，則有 $\overline{PG} = \overline{GM} = \overline{MB}$

(3) $\because \overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，故由(1)、(2)可知

$$\overline{AE} = \overline{EP} = \overline{PG} = \overline{GM} = \overline{MB}$$

(4)過E、G、M和點作 \overline{BC} 的平行線，依次交 \overline{DC} 於F、H、N三點

(5) $\because \overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{GH} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ，

$$\text{且 } \overline{AE} = \overline{EP} = \overline{PG} = \overline{GM} = \overline{MB} \text{，}$$

$$\therefore \overline{DF} = \overline{FQ} = \overline{QH} = \overline{HN} = \overline{NC} \text{。}$$

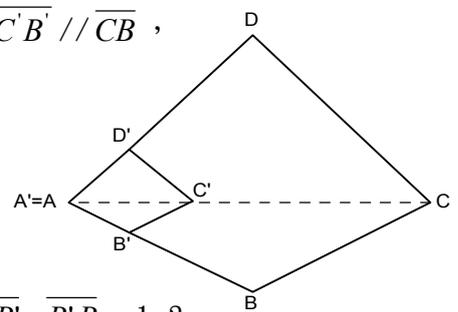
(6)由(5)知 $\overline{DQ} = 2\overline{DF}$ ， $\overline{QC} = 3\overline{DF}$ ，

$$\therefore \overline{DQ} : \overline{QC} = 2 : 3 \quad \text{故得 } \overline{DQ} : \overline{QC} = \overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3 \text{。}$$

【範例】如右圖，四邊形 $ABCD \sim A'B'C'D'$ ， $\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$ 、 $\overline{C'B'} \parallel \overline{CB}$ ，

$$\text{又 } \overline{A'D'} : \overline{D'D} = \overline{A'B'} : \overline{B'B} = 1 : 3 \text{。}$$

【試證】四邊形 $A'B'C'D' = \frac{1}{3}$ 四邊形 $ABCD$ 。



【證明】 $\because \overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$ 、 $\overline{C'B'} \parallel \overline{CB}$ ，且 $\overline{A'D'} : \overline{D'D} = \overline{A'B'} : \overline{B'B} = 1 : 3$ ，

$$\therefore \text{在 } \triangle ADC \text{ 與 } \triangle A'D'C' \text{ 中， } \overline{A'D'} : \overline{D'D} = \overline{C'D'} : \overline{CD} = \overline{A'C'} : \overline{C'C} = 1 : 3$$

則可知 $\triangle A'D'C' = \frac{1}{3} \triangle ADC$ ，同理可得 $\triangle A'B'C' = \frac{1}{3} \triangle ABC$ ，

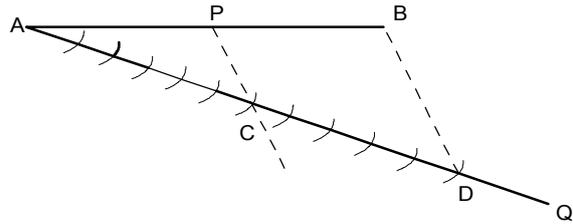
$$\Rightarrow \text{四邊形 } A'B'C'D' = \frac{1}{3} \text{四邊形 } ABCD \text{。}$$

比例線段尺規作圖

【範例】在一線段上取一點，使所分成的兩線段成一定比例。

【已知】線段 \overline{AB}

【求作】一點P，使 $\overline{AP} : \overline{PB} = 6 : 5$



【作法】(1)過A點作 \overrightarrow{AQ} 。

(2)在 \overrightarrow{AQ} 上連續取兩點C、D，使得 $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{CD} = 5$ 。

(3)連接 \overline{BD} ，並過C點作 \overline{BD} 的平行線，交 \overline{AB} 於P點，
則P為所求的點。

【證明】(1)在 $\triangle ABD$ 中，

$$\because \overline{CP} \parallel \overline{DB},$$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AC} : \overline{CD}。$$

(2) $\because \overline{AC} = 6$ ， $\overline{CD} = 5$ ，

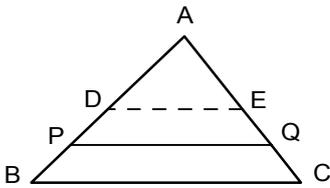
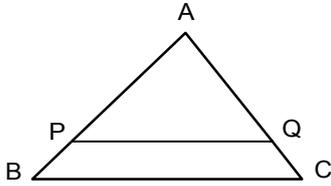
$$\therefore \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AC} : \overline{CD} = 6 : 5。$$



小 試 身 手

【範例一】

如圖 $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$
求證： $\overline{AQ} : \overline{QC} = 3 : 1$



證明：

(1) 取 \overline{AB} 的中點D，並過D做 \overline{BC} 的平行線交 \overline{AC} 於E，則E為 \overline{AC} 的中點

$$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{EC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

(2) \because D為 \overline{AB} 的中點

$$\therefore \overline{AD} = \overline{DB} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$\text{又} \because \overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{AP} = \frac{3}{4} \overline{AB}, \quad \overline{PB} = \frac{1}{4} \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{DP} = \overline{AP} - \overline{AD} = \frac{1}{4} \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{DP} = \overline{PB}$$

(3) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

$$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$$

$$\Rightarrow \text{又} \because \overline{DP} = \overline{PB} \quad \therefore \overline{EQ} = \overline{QC}$$

(4) $\overline{EC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ，且 $\overline{EQ} = \overline{QC}$

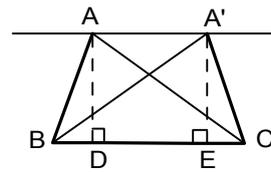
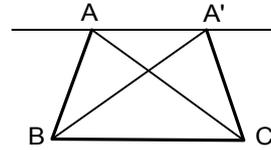
$$\therefore \overline{EQ} = \overline{QC} = \frac{1}{4} \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{AQ} = \frac{3}{4} \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{AQ} : \overline{QC} = \frac{3}{4} \overline{AC} : \frac{1}{4} \overline{AC} = 3 : 1$$

【練習一】

如右圖所示，設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'BC$ 共用底邊 \overline{BC} ，又設 $\overline{AA'} \parallel \overline{BC}$ ；
試證： $\triangle ABC = \triangle A'BC$



證明：

(1) 分別過A與A'點作直線 \overline{BC} 的垂線，垂足點D、E，則 $\overline{AD} \parallel \overline{A'E}$

$$\text{又} \because \overline{AA'} \parallel \overline{BC} \quad \therefore \overline{AD} = \overline{A'E}$$

(2) $\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{AD}$$

$$\text{同理：} \triangle A'BC = \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{A'E}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC : \triangle A'BC$$

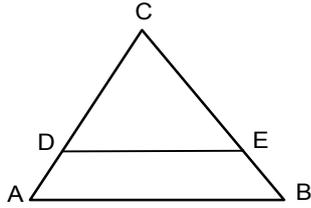
$$= \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{AD} : \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{A'E}$$

$$= \overline{AD} : \overline{A'E}$$

$$\text{又} \because \overline{AD} = \overline{A'E} \quad \therefore \triangle ABC = \triangle A'BC$$

【範例二】

如右圖，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{CD} = 7$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{CE} = 5$ ，求 \overline{BE}

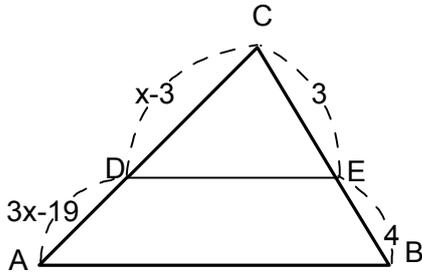


解答：

$$\begin{aligned} &\because \overline{DE} \parallel \overline{AB} \\ &\therefore \overline{CD} : \overline{DA} = \overline{CE} : \overline{BE} \Rightarrow 7 : 3 = 5 : \overline{BE} \\ &7\overline{BE} = 3 \times 5 \\ &\therefore \overline{BE} = \frac{15}{7} \end{aligned}$$

【範例三】

如右圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，求(1) x 及(2) \overline{AC}

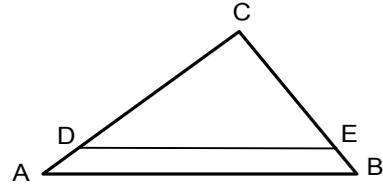


解答：

$$\begin{aligned} (1) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中} \\ &\because \overline{DE} \parallel \overline{AB} \therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \\ &\text{即 } \frac{x-3}{3x-19} = \frac{3}{4} \\ &\therefore 3(3x-19) = 4(x-3) \\ &9x-57=4x-12, \\ &9x-4x=57-12, 5x=45 \\ &\therefore x=9 \\ (2) \therefore \overline{AC} &= x-3+3x-19=4x-22 \\ &= 4 \times 9 - 22 = 14 \end{aligned}$$

【練習二】

如右圖，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{CD} = 8$ ， $\overline{CE} = 2\overline{AD}$ ， $\overline{BE} = 1$ ，求 \overline{AD} 及 \overline{CE} 。

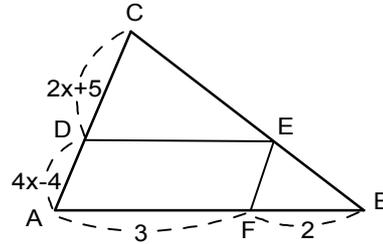


解答：

$$\begin{aligned} &\text{在 } \triangle CAB \text{ 中 } \because \overline{DE} \parallel \overline{AB} \\ &\therefore \overline{CD} : \overline{AD} = \overline{CE} : \overline{BE} \\ &\text{設 } \overline{AD} = x, \text{ 又 } \overline{CD} = 8 \\ &\quad \overline{CE} = 2\overline{AD} = 2x, \overline{BE} = 1 \\ &\therefore 8 : x = 2x : 1, 2x^2 = 8, x^2 = 4 \\ &\therefore x = \pm 2 \text{ (} -2 \text{ 不合) } \therefore \overline{CE} = 2 \times 2 = 4 \\ &\quad \overline{AD} = 2, \overline{CE} = 4 \end{aligned}$$

【練習三】

如右圖 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ ，求 x 及 \overline{EF}



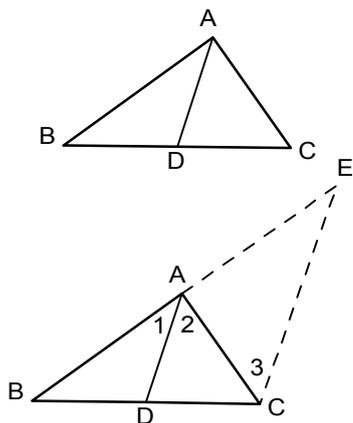
解答：

$$\begin{aligned} &\because \overline{DE} \parallel \overline{AB} \\ &\therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \dots\dots\dots (i) \\ &\because \overline{EF} \parallel \overline{AC} \therefore \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \dots\dots\dots (ii) \\ &\text{由 (i), (ii) 知 } \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \\ &\therefore \frac{2x+5}{4x-4} = \frac{3}{2} \\ &12x-12=4x+10, 8x=22 \therefore x = \frac{11}{4} \\ &\therefore \text{ADEF 是平行四邊形} \\ &\therefore \overline{EF} = \overline{AD} = 4 \times \frac{11}{4} - 4 = 7 \\ &x = \frac{11}{4}, \overline{EF} = 7 \end{aligned}$$

【範例四】

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 \overline{BC} 上且 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$

求證： \overline{AD} 平分 $\angle BAC$



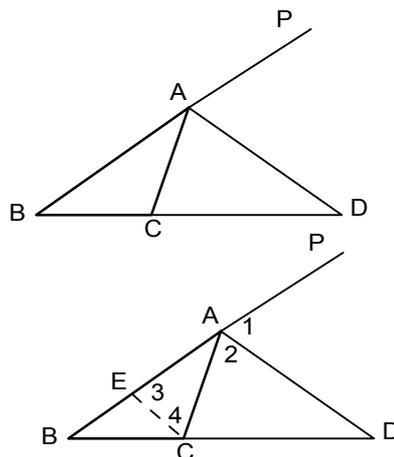
證明：

- (1) 過 C 做 \overline{AD} 的平行線交 \overline{BA} 的延長線於 E
- (2) $\overline{AD} \parallel \overline{EC} \therefore \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AE}$
又 $\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$
 $\therefore \overline{AE} = \overline{AC} \Rightarrow \angle E = \angle 3$
- (3) $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{EC} \therefore \angle 1 = \angle E, \angle 2 = \angle 3$
又因 $\angle E = \angle 3, \therefore \angle 1 = \angle 2$
故 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$

【練習四】

如圖， $\triangle ABC$ 中， D 在 \overline{BC} 的延長線上，且 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$

求證： \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 的外角 $\angle PAC$



證明：

- (1) 過 C 做 \overline{AD} 的平行線交 \overline{BA} 的延長線於 E
- (2) $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{EC} \therefore \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AE}$
又 $\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$
 $\therefore \overline{AE} = \overline{AC} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4$
- (3) $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{EC} \therefore \angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4$
又 $\therefore \angle 3 = \angle 4 \therefore \angle 1 = \angle 2$
故 \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 的外角 $\angle PAC$