相似三角形

兩個多邊形相似，需同時具有「對應角相等」，且「對應邊成比例」， 才能確定這兩個多邊形相似。

兩三角形相似則只需部份條件成立即可，比如（1）對應角相等，便可說明兩三角形相似（AAA 相似、AA 相似性質）；或（2）對應邊成比例，便可說明兩三角形相似（SSS 相似性質）；或（3）一對應角相等，且兩夾邊對應成比例（SAS 相似性質），便可說明兩三角形相似，以下就此問題作進一步探討。

三角形的相似性質

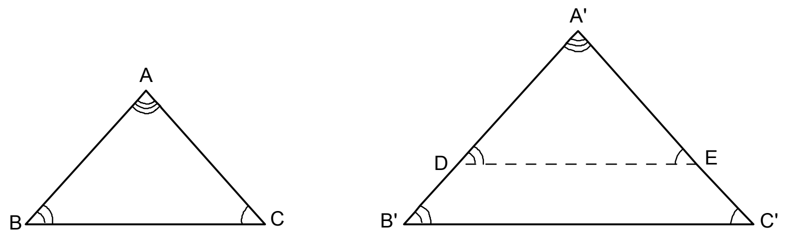
【AAA 相似性質】如果兩個三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似。

【SSS 相似性質】如果兩個三角形的三邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

【SAS 相似性質】如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

現在就上列【AAA 相似性質】、【SSS 相似性質】、【SAS 相似性質】3 個性質來一一證明。

【AAA 相似性質】如果兩個三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似。



【已知】在△ABC 與△A'B'C'中，∠A＝∠A'，∠B＝∠B'，∠C＝∠C'。

【求證】△ABC～△A'B'C'。

【證明】(1)設 $\overline{A'B'}>\overline{AB}$，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點 D，使得 $\overline{A'D}=\overline{AB}$。

(2)過 D 點作 $\overline{B'C'}$ 的平行線，交 $\overline{A'C'}$ 於 E 點，

則∠A'DE＝$\angle B'$＝B，∠A'ED＝$\angle C'=\angle C$。

(3)在△A'DE 與△ABC 中，$\because \overline{A'D}=\overline{AB}$，∠A'＝∠A，∠A'DE＝∠B，

∴△A'DE≅△ABC，$\therefore \overline{AC}=\overline{A'E}$。

(4) $\because \overline{DE}//\overline{B'C'}$，$\therefore \overline{A'D}:\overline{A'B'}=\overline{A'E}:\overline{A'C'}$。

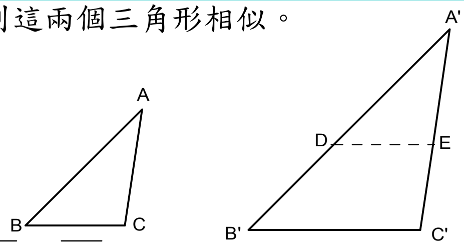
(5) $\because \overline{A'D}=\overline{AB}$，$\overline{A'E}=\overline{AC}$，代入(4)式得 $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$。

(6)同理可得 $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$。

(7)由(5)與(6)可得 $\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$，

又∠A＝∠A'，∠B＝∠B'，∠C＝∠C'，所以△ABC～△A'B'C'。

【SSS 相似性質】如果兩個三角形的三邊對應成比例，則這兩個三角形相似。



【已知】在△ABC 與△A'B'C'中，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

【求證】△ABC～△A'B'C'。

【證明】(1)設 $\overline{A'B'}>\overline{AB}$，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點 D，使得 $\overline{A'D}=\overline{AB}$。

(2)過 D 點作 $\overline{B'C'}$ 的平行線，交 $\overline{A'C'}$ 於 E 點

∠A＝∠A'，∠A'DE＝∠B'，∠A'ED＝∠C'∟∟（i）

由 AAA 相似性質⇒△A'DE～△A'B'C'。

故 $\dfrac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}}$

(3) ∵ $\overline{A'D}=\overline{AB}$，且 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

∴ $\overline{DE}=\overline{BC}$，$\overline{A'E}=\overline{AC}$，

∵ $\overline{A'D}=\overline{AB}$，$\overline{DE}=\overline{BC}$，$\overline{A'E}=\overline{AC}$

由 SSS 全等性質⇒△ABC≅△A'DE。

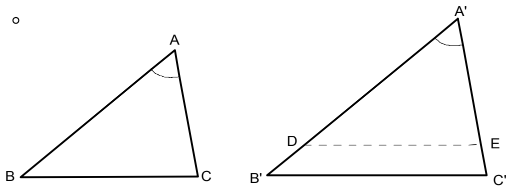
(4) ∵△ABC≅△A'DE，

∴∠A'＝∠A，∠A'DE＝∠B，∠A'ED＝∠C（對應角相等）∟∟（ii）

由（i）(ii）⇒∠A＝∠A'，∠B＝∠B'，∠C＝∠C'

∴△ABC～△A'B'C'。

【SAS 相似性質】如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。



【已知】在△ABC 與△A'B'C'中，∠A＝∠A'，$\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}$。

【求證】△ABC～△A'B'C'

【證明】(1)設 $\overline{A'B'}>\overline{AB}$，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點 D，使得 $\overline{A'D}=\overline{AB}$。

(2)過 D 點作 $\overline{DE}$，使得∠A'DE＝∠B，且 E 點在 $\overline{A'C'}$ 上。

(3)在△ABC 與△A'DE 中，∵ $\angle A=\angle A'$，$\overline{AB}=\overline{A'D}$，$\angle B=\angle A'DE$，

由 ASA 全等性質⇒△ABC≅△A'DE

∵△ABC≅△A'DE，故 $\overline{A'E}=\overline{AC}$，$\overline{A'D}=\overline{AB}$，$\overline{DE}=\overline{BC}$∟∟（i）

∠A'＝∠A，∠A'DE＝∠B，∠A'ED＝∠C∟∟（ii）

(4)∵$\overline{A'D}=\overline{AB}$，$\overline{A'E}=\overline{AC}$，且$\overline{AB}$：$\overline{A'B'}=\overline{AC}$：$\overline{A'C'}$

∴$\overline{A'D}$：$\overline{A'B'}=\overline{A'E}$：$\overline{A'C'}$，故$\overline{DE}//\overline{B'C'}$。

(5)∵$\overline{DE}//\overline{B'C'}$　∴△A'DE～△A'B'C'。

∵△A'DE～△A'B'C'
∴∠A'＝∠A'，∠A'DE＝∠B'，∠A'ED＝∠C'∟∟（iii）

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}}$$ ∟∟（iiii）

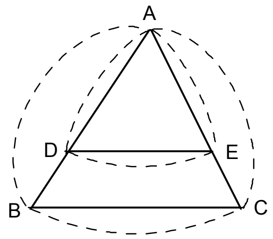
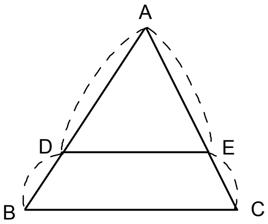
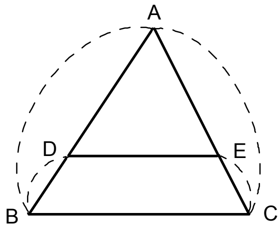
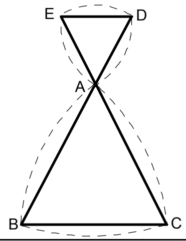
(6) 由（i）(ii)(iii)(iiii)
⇒∠A＝∠A'，∠B＝∠B'，∠C＝∠C'

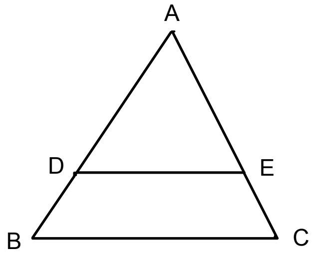
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

∴△ABC～△A'B'C'

有關相似三角形的計算

若$\overline{DE}//\overline{BC}$，便可延伸出以下四個常見的計算公式：

			
$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$	$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$	$\frac{\overline{EA}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}$
$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{DE}:\overline{BC}$	$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$	$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$	$\overline{EA}:\overline{AC}=\overline{DA}:\overline{AB}=\overline{ED}:\overline{BC}$



【已知】在△ABC與△ADE中，$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

【求證】$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$，$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$

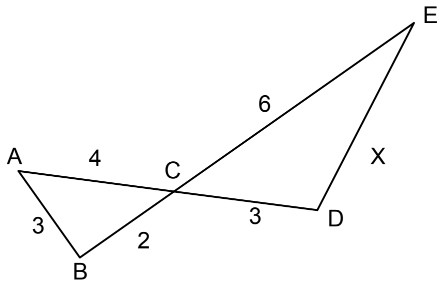
【證明】在△ABC與△ADE中，Θ $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

∴△ABC～△ADE（線段成比例）

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}-\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}-\overline{AE}} \left(\Theta\ \frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{d}{c-a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{\mathrm{EC}}}$$ ，同理可證，$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{DB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{EC}}}$

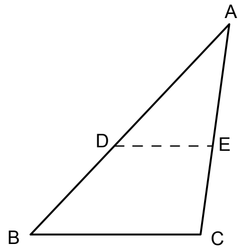
【範例】如圖，求 X＝________。



【解答】∵∠ACB＝∠DCE 又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{3}{2}$

∴△ACB～△ECD⇒ $\frac{X}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow X = \frac{9}{2}$

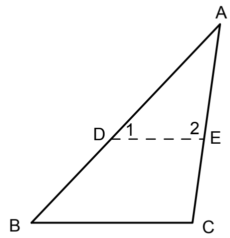
【範例】



【已知】在△ABC中，$\overline{DE} // \overline{BC}$ 。

【求證】△ADE～△ABC 且 $\overline{AD}$ ：$\overline{AB}$ ＝$\overline{AE}$ ：$\overline{AC}$＝$\overline{DE}$ ：$\overline{BC}$ 。

【證明】∵$\overline{DE} // \overline{BC}$ ⇒∠1＝∠B，∠2＝∠C



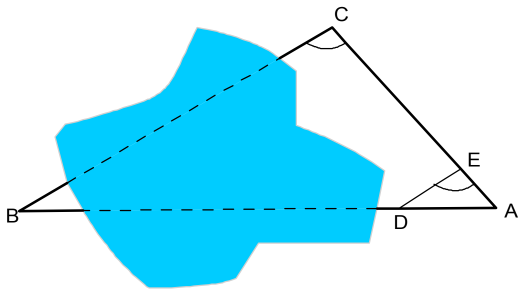
又∠A＝∠A
∴△ADE～△ABC（AAA相似）。
則對應邊成比例，

即 $\overline{AD}$ ：$\overline{AB}$ ＝$\overline{AE}$ ：$\overline{AC}$＝$\overline{DE}$ ：$\overline{BC}$ 。

【範例】A、B兩點間有湖泊，為了求 $\overline{AB}$ ，我們先找一點C，量得 $\overline{AC}$ ＝100公尺。

在 $\overline{AC}$ 上取 $\overline{AE}$ 為20公尺，過E點作 $\overline{ED} // \overline{BC}$ ，使A、D、B三點共線，

量得 $\overline{AD}$ ＝38公尺，求 $\overline{AB}$ 。



【解答】在△ABC中，$\overline{DE} // \overline{BC}$ ，所以

$\overline{AD}$ ：$\overline{AB}$ ＝$\overline{AE}$ ：$\overline{AC}$

因為 $\overline{AD}$ ＝38公尺，$\overline{AE}$ ＝20公尺，$\overline{AC}$ ＝100公尺，設 $\overline{AB}$ ＝x公尺

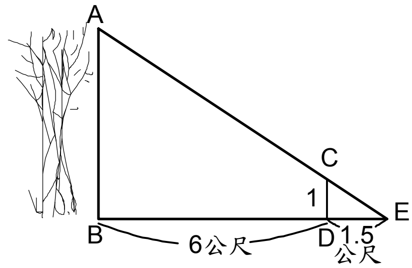
所以 38：x ＝20：100

$x = \frac{38 \times 100}{20}$ ＝190公尺， 即 $\overline{AB}$ ＝190公尺。

【範例】如右圖，某人為了要測樹高$\overline{AB}$，打了一根標桿$\overline{CD}$於離樹根 6 公尺處 D 點，

並在$\overline{BD}$的延長線上找到一點 E，使 A、C、E 三點成一直線。已知$\overline{CD}$＝1 公尺，

又測得$\overline{DE}$＝1.5 公尺，求樹高$\overline{AB}$。



【解】(1)在△ABE 與△CDE 中

∵∠ABE＝∠CDE＝90^0，∠E＝∠E

∴△ABE～△CDE(AAA 相似)

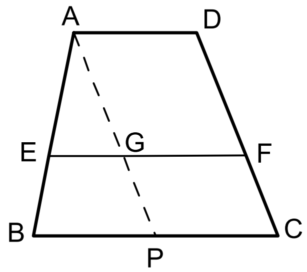
(2)∴$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{DE}}$（對應邊成比例）

但$\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{DE}$＝6＋1.5＝7.5（公尺）

∴$\overline{AB}$：1＝7.5：1.5⇒$\overline{AB}=\dfrac{7.5}{1.5}$＝5（公尺）

【範例】如圖，ABCD 為梯形，且$\overline{AD}//\overline{EF}//\overline{BC}$，若$\overline{AD}$＝3 公分，$\overline{BC}$＝6 公分，

且$\overline{AE}$：$\overline{EB}$＝3：2，求$\overline{EF}$的長。



【解】(1)過 A 作$\overline{DC}$的平行線各交$\overline{EF}$、

$\overline{BC}$於 G、P 則 AGFD、GPCF 都是平行四邊形

⇒$\overline{GF}=\overline{PC}$＝3 公分

(2)在△ABP 中　∵$\overline{EG}//\overline{BP}$

∴$\overline{EG}$：$\overline{BP}=\overline{AE}$：$\overline{AB}$＝3：5

⇒$\overline{EG}:3=3:5$　⇒$\overline{EG}$＝1.8 公分　⇒$\overline{EF}$＝4.8 公分

【範例】∠ACD＝∠B，$\overline{AC}$＝8，$\overline{CD}$＝9，$\overline{BC}$＝18，則$\overline{AB}$＝?　$\overline{AD}$＝?

【解】∵∠A＝∠A，∠ACD＝∠B　∴△ACD～△ABC(AAA 相似)

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{8}{\overline{AB}}=\frac{9}{18}=\frac{\overline{AD}}{8}$$

∴$\overline{AB}$＝16,　$\overline{AD}$＝4

相似三角形的相關性質：

【性質 1】兩相似三角形對應高的比等於其對應邊的比。

【性質 2】兩個相似三角形周長的比等於對應邊的比。

【性質 3】兩個相似三角形對應分角線長的比等於任一組對應邊的比。

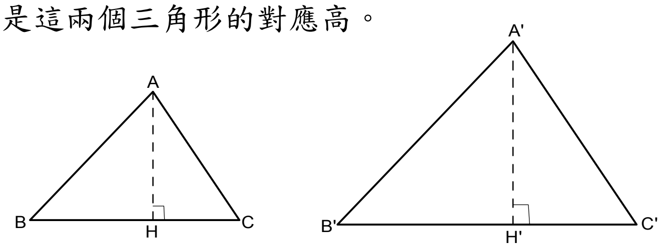
【性質 4】兩個相似三角形對應中線的比等於任一組對應邊的比。。

【性質 5】兩個相似三角形面積的比等於對應邊平方的比。

現在就上列 5 個性質來一一證明:

【性質 1】兩相似三角形對應高的比等於其對應邊的比。

【已知】△ABC～△A'B'C'，$\overline{AH}$ 與 $\overline{A'H'}$ 是這兩個三角形的對應高。



【求證】 $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ 。

【證明】(1) 在△ABH 與△A'B'H'中，

$\because \angle B=\angle B'$， $\angle AHB=90^0=\angle A'H'B'$，

$\therefore \angle BAH=\angle B'A'H'$。

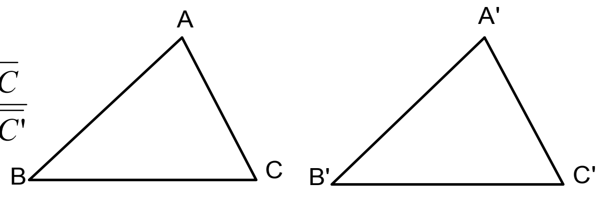
(2) ∵△ABH 與△A'B'H'的三內角對應相等，

∴△ABH～△A'B'H'。

(3) ∵△ABH～△A'B'H' $\therefore \dfrac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ 。

【性質 2】兩個相似三角形周長的比等於對應邊的比。

【已知】△ABC ～△A'B'C'



【求證】 $\dfrac{\Delta ABC\text{周長}}{\Delta A'B'C'\text{周長}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

【證明】(1) ∵△ABC～△A'B'C'

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

(2) 設 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=r$

則 $\overline{AB}=r\overline{A'B'}$，$\overline{BC}=r\overline{B'C'}$，$\overline{CA}=r\,\overline{C'A'}$

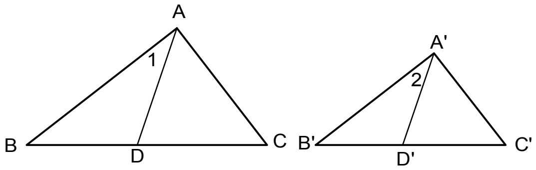
(3) $\dfrac{\Delta ABC\text{ 周長}}{\Delta A'B'C'\text{ 周長}}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}{\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{A'C'}}=\dfrac{r\overline{A'B'}+r\overline{B'C'}+r\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{A'C'}}=r$

$\therefore \dfrac{\Delta ABC\text{ 周長}}{\Delta A'B'C'\text{ 周長}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

【性質 3】兩個相似三角形對應分角線長的比等於任一組對應邊的比。

【已知】$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$，$\overline{AD}$、$\overline{A'D'}$分別為$\angle A$、$\angle A'$的分角線

【求證】$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$



【證明】(1)$\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$\therefore \angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$（對應角）

(2)在$\triangle ABD$與$\triangle A'B'D'$中

$\because \angle B = \angle B'$，又$\angle 1 = \dfrac{1}{2}\angle A = \dfrac{1}{2}\angle A' = \angle 2$

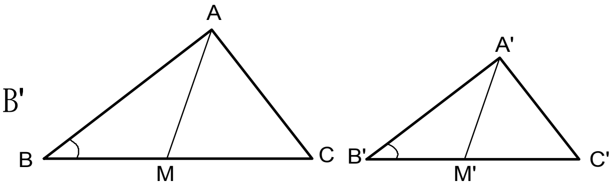
$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$（AA 相似）

(3)$\therefore \dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$（對應邊成比例）

【性質 4】兩個相似三角形對應中線長的比等於任一組對應邊的比。

【已知】$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，$\overline{AM}$為$\overline{BC}$上中線，$\overline{A'M'}$為$\overline{B'C'}$上中線。

【求證】$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$



【證明】(1)$\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$　$\therefore \angle B = \angle B'$

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

(2)又$\overline{AM}$、$\overline{A'M'}$分別為$\overline{BC}$、$\overline{B'C'}$上的中線

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\frac{1}{2}\overline{B'C'}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}}$

(3)在$\triangle ABM$與$\triangle A'B'M'$中

$\because \angle B = \angle B'$，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}}$

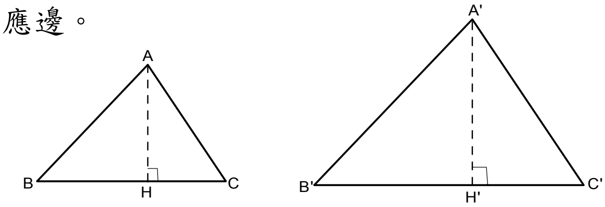
$\therefore \triangle ABM \sim \triangle A'B'M'$（SAS 相似）

(4)$\therefore \dfrac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$（對應邊成比例）

【性質5】兩個相似三角形面積的比等於對應邊平方的比。

【已知】△ABC～△A'B'C'，$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$為對應邊。

【求證】$\dfrac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$。



【證明】(1)設$\overline{AH}$與$\overline{A'H'}$為這兩個三角形的對應高。

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

(2)∵ ΔABC的面積＝$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$，

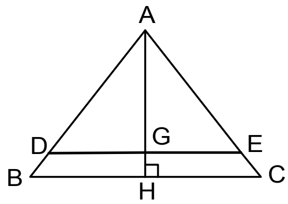
$\Delta A'B'C'$的面積＝$\frac{1}{2}\times\overline{B'C'}\times\overline{A'H'}$，

$$\therefore\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}}{\frac{1}{2}\times\overline{B'C'}\times\overline{A'H'}}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AH}}{\overline{B'C'}\times\overline{A'H'}}$$

$$=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\times\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

$$\therefore\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

【範例】 如右圖，設在ΔABC中，$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$，已知$\overline{AH}$＝2公尺，$\overline{BC}$＝3公尺，$\overline{GH}$＝0.5公尺，求$\overline{DE}$。



【解】(1)在△ABC中， ∵$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$

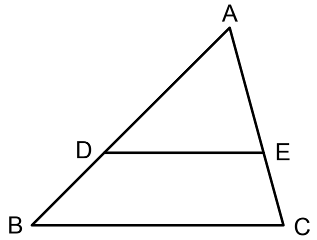
∴△ADE～△ABC

(2)∴$\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AH}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$（對應高的比等於對應邊的比）

即（2－0.5）：2＝$\overline{DE}$：3

⇨$\overline{DE}=\dfrac{1.5\times3}{2}$＝2.25（公尺）

【範例】 如右圖，△ABC 中，$\overline{DE} // \overline{BC}$ 且 $\overline{AD}$ ：$\overline{DB}$ ＝2：1，那麼△ADE：四邊形 BDEC 為多少？



【解】

$\overline{DE}$ ：$\overline{BC}$ ＝ $\overline{AD}$ ：$\overline{AB}$ ＝2：3

∴△ADE：△ABC＝ $\overline{AD}^2$ ：$\overline{AB}^2$ ＝4：9

∴△ADE：四邊形 BDEC＝4：(9－4) ＝4：5

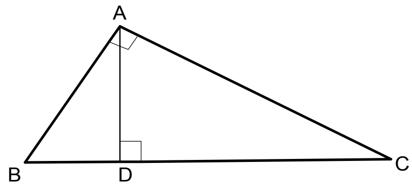
直角三角形的相似性質：

我們很容易把一個直角三角形分成兩個直角三角形，而這兩個大小不等的直角三角形亦為相似的。

【定理】:直角三角形斜邊上的高，把原形分成兩個直角三角形與原來的三角形相似

如下圖，證明△ABC 中，∠A 為直角，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，則△ABD～△CBA，△CAD～△CBA。

【證明】



(1)在△ABD 與△CBA 中，

$\because \angle ADB = 90^0 = \angle CAB$ ，∠B ＝∠B，

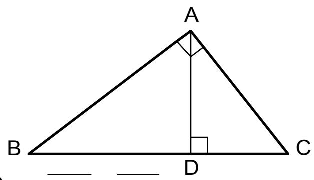
∴△ABD～△CBA。(AA 相似)

(2)在△CAD 與△CBA 中，

$\because \angle CAB = 90^0 = \angle ADC$ ，∠C＝∠C，

∴△CAD～△CBA。(AA 相似)

【範例】△ABC 中，∠BAC＝90^0 ，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

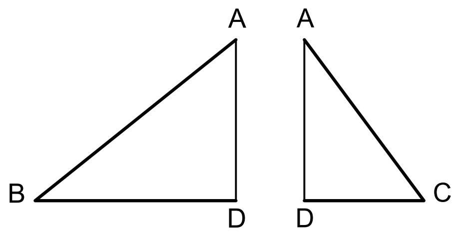


【求證】(1) $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$ (2) $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ (3) $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}$

【證明】△ABC 中，∵∠BAC＝90^0 且 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ∴△ABD～△CAD～△CBA

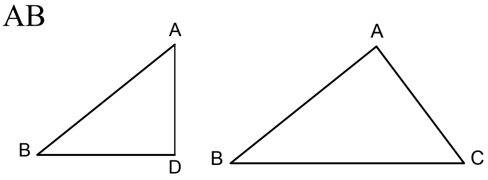
(1) ∵△ABD～△CAD ∴ $\overline{AD}$ ：$\overline{CD}$ ＝ $\overline{BD}$ ：$\overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$



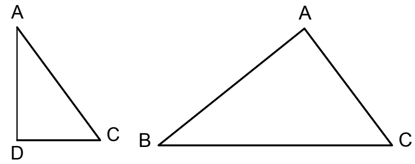
（2）$\because \triangle ABD \sim \triangle CBA$　$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BD}:\overline{AB}$

$\Rightarrow \overline{AB}^{\,2}=\overline{BD}\times\overline{BC}$



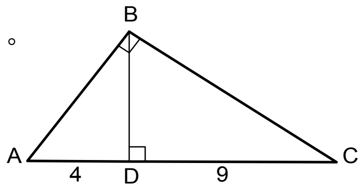
（3）$\because \triangle CAD \sim \triangle CBA$　$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}=\overline{CD}:\overline{AC}$

$\Rightarrow \overline{AC}^{\,2}=\overline{CD}\times\overline{BC}$



【範例】如右圖，$\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 為直角，D 為 B 到 $\overline{AC}$ 的垂足。

已知 $\overline{CD}=9$ 公分，$\overline{AD}=4$ 公分，求 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{BD}$ 。



【解】（1）$\overline{BD}^{\,2}=\overline{AD}\times\overline{CD}=4\times9=36$

$\therefore \overline{BD}=\pm6$（公分）（$-6$ 不合）

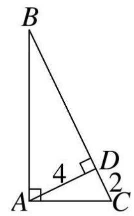
（2）在直角 $\triangle BDC$ 中，

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{6^2+9^2}=\sqrt{36+81}$

$=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$（公分）

（3）在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$（公分）

【範例】如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AD}$ 為斜邊 $\overline{BC}$ 上的高，若 $\overline{AD}=4$，$\overline{CD}=2$，試求：(1) $\overline{AC}=$？ (2) $\overline{BD}=$？



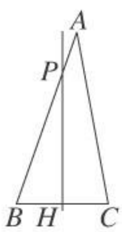
【解】(1) $\overline{AC}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ (或 $2\sqrt{5}$)

(2) $\because \triangle ABD \sim \triangle CAD$

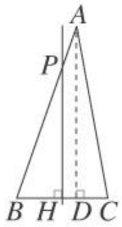
$\therefore \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$，$\dfrac{\overline{BD}}{4}=\dfrac{4}{2}$

$\therefore \overline{BD}=8$

【範例】如圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}$ 的中垂線分別與 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 相交於 P、H 兩點。已知 $\overline{BP}=18$ 公分，$\overline{AP}=6$ 公分，$\overline{BC}=12$ 公分，且 $\triangle ABC$ 的面積為 $96\sqrt{2}$ 平方公分，則 $\overline{PH}=$？



【解】作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$



$\triangle ABC$的面積$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}$

$\therefore 96\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times 12\times\overline{AD}$　　$\therefore\overline{AD}=16\sqrt{2}$

又 $\overline{PH}\perp\overline{BC}$　　$\therefore\angle B=\angle B$，$\angle PHD=\angle ADB$(AA性質)

$\Rightarrow\triangle ABD\approx\triangle PBH$

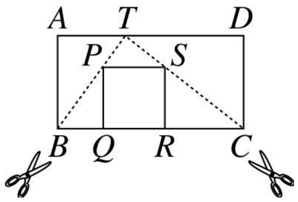
$\therefore\overline{BP}:\overline{AB}=\overline{PH}:\overline{AD}$

$\therefore 18:(18+6)=\overline{PH}:16\sqrt{2}$

$\therefore 18:24=\overline{PH}:16\sqrt{2}$

$\therefore\overline{PH}=12\sqrt{2}$(公分)

【範例】如圖，將邊長為14公分的正方形$PQRS$放在矩形$ABCD$上，其中$\overline{QR}$疊在$\overline{BC}$上。今沿$\overline{BP}$、$\overline{CS}$剪出$\triangle PST$，結果頂點T恰好在$\overline{AD}$上，已知$\overline{BC}=42$公分，試求$\overline{AB}=$？



【解】如下圖，作$\overline{TH}\perp\overline{BC}$，設$\overline{TH}=x$公分，

則$\overline{TK}=(x-14)$公分

$\because\overline{PS}//\overline{BC}$

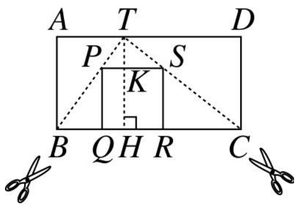
$\therefore\overline{TK}:\overline{TH}=\overline{TP}:\overline{TB}=\overline{PS}:\overline{BC}$

$=14:42=1:3$

$\therefore(x-14):x=1:3$

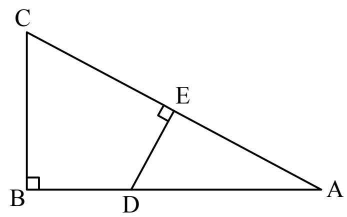
$3x-42=x$，$x=21$

$\therefore\overline{AB}=\overline{TH}=21$(公分)



【範例】如圖，△ABC 中，$\angle B=90^0$，$\overline{AB}=15$，$\overline{BC}=8$，又$\overleftrightarrow{DE}$是$\overline{AC}$的中垂線，

求$\overline{DE}=$?



【解】$\overline{AC}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17$，$\overline{AE}=\frac{17}{2}$

又△ADE~△ACB (AA)

$\therefore\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$

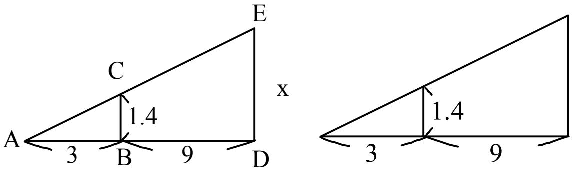
$\therefore\frac{17}{2}:15=\overline{DE}:8\Rightarrow 15\times\overline{DE}=68\quad\Rightarrow\overline{DE}=\frac{68}{15}$

【範例】某大樓前有一盞探照燈，照在大樓前的牆壁上，小榮的身高為 1.4 公尺，站在離大樓 9 公尺，離探照燈 3 公尺處，則小榮在大樓牆壁上的人影高多少公尺?

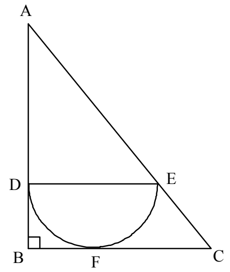
【解】令人影為x

$\because\Delta ABC\sim\Delta ADE$

$\therefore\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{x}{\overline{AD}}\Rightarrow\frac{1.4}{3}=\frac{x}{12}\quad\therefore x=5.6$



【範例】直角三角形 ABC 中，$\angle ABC=90^0$，$\overline{AB}=30$，$\overline{BC}=15$，內接半圓的直徑 $\overline{DE}//\overline{BC}$ 且切 $\overline{BC}$ 於 F，則 $\overline{FC}=?$

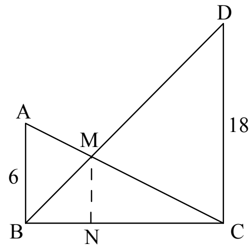


【解】令 $\overline{BD}=r$ $\Rightarrow \overline{DE}=2r$，$\overline{AD}=30-r$，$\overline{FC}=15-r$，$\overline{BF}=r$

$\because \Delta ABC \sim \Delta ADE$ $\therefore \dfrac{30}{15}=\dfrac{30-r}{2r}$ $\Rightarrow 60r=450-15r$ $\Rightarrow r=6$

$\therefore \overline{FC}=15-6=9$

【範例】如圖中，$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ 都和 $\overline{BC}$ 垂直，$\overline{AB}=6$ 公分，$\overline{CD}=18$ 公分，$\overline{BC}=12$ 公分，則 $\overline{MN}$ 之長為?



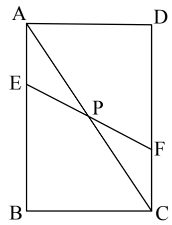
【解】令 $\overline{MN}=x$, $\overline{BN}=y$, $\overline{CN}=12-y$

$\because \triangle BNM \sim \triangle BDC$ $\Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{18}{12}=\dfrac{3}{2}\cdots①$

又 $\triangle CNM \sim \triangle CBA$ $\Rightarrow \dfrac{x}{12-y}=\dfrac{1}{2}\cdots②$

由①、②可得 $\begin{cases}2x-3y=0\\2x+y=12\end{cases}$，$y=3$, $x=\dfrac{9}{2}$

【範例】如圖，長方形 ABCD 中，$\overline{AC}$ 為對角線，$\overline{AD}=9$ 公分，$\overline{AB}=12$ 公分，若 $\overline{AE}=\overline{CF}$，則 $\overline{AP}$ 為多少公分?



【解】$\because \angle PAE=\angle PCF$，$\angle APE=\angle CPF$，$\overline{AE}=\overline{CF}$

$\therefore \Delta APE \cong \Delta CPF$ (AAS)

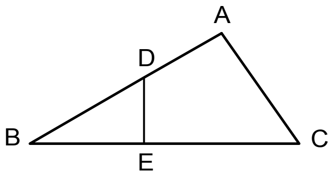
$\therefore \overline{AP}=\overline{CP}$, 又 $\overline{AP}+\overline{CP}=\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$ $\therefore \overline{AP}=\dfrac{15}{2}=7.5$

小 試 身 手

【範例一】

如圖，△ABC 中，∠A＝90°，D 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$

求證：△ABC～△EBD



證明：(1)∵ $\overline{DE} \perp \overline{BC}$　∴∠DEB＝90°

又∵∠A＝90°　∴∠A＝∠DEB

(2)在△ABC 與△EBD 中

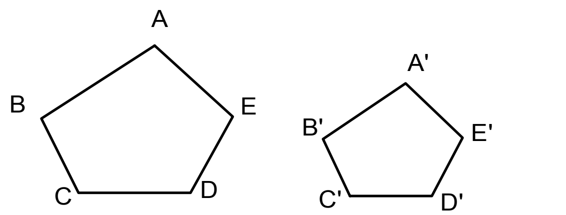
∵∠A＝∠DEB，∠B＝∠B

∴△ABC～△EBD（AA 相似）

【練習一】

如圖，五邊形 ABCDE～五邊形 A'B'C'D'E'

求證：△ABC～△A'B'C'



證明：∵五邊形 ABCDE～五邊形 A'B'C'D'E'

∴∠B＝∠B'

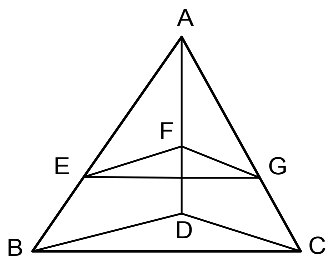
且 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$

⇒△ABC～△A'B'C'（SAS 相似）

【範例二】

如圖，D 為△ABC 內部一點，E、F、G 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{AD}$ 、$\overline{AC}$ 之中點

求證：△EFG～△BDC



證明：在△ABD 中

∵E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{AD}$ 的中點

∴ $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BD}$　⇒ $\overline{EF} : \overline{BD} = 1:2$

同理 $\overline{EG} : \overline{BC} = 1:2$，

$\overline{FG} : \overline{DC} = 1:2$

⇒ $\overline{EF} : \overline{BD} = \overline{EG} : \overline{BC}$

$= \overline{FG} : \overline{DC}$

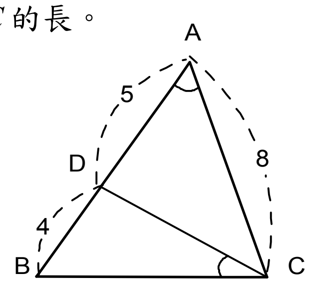
故△EFG～△BDC(SSS 相似)

【練習二】

如右圖，ΔABC 中，∠BCD＝∠A，$\overline{AD} = 5$，$\overline{BD} = 4$

(1)求證：△BCD～△BAC

(2)求 $\overline{BC}$ 的長。



證明：(1)在△BCD 與△BAC 中

∵∠BCD＝∠A，∠B＝∠B

∴△BCD～△BAC(AA 相似)

∵△BCD～△BAC

∴ $\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{BC}$

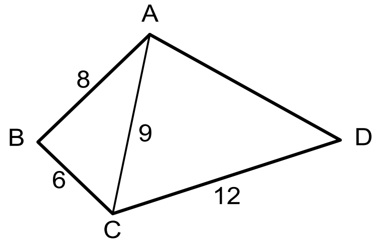
$\overline{BC}^2 = (5+4) \times 4 = 36$

⇒ $\overline{BC} = 6$（－6 不合）

【範例三】

如圖，$\angle B = \angle ACD$，$\overline{AB} = 8$，$\overline{BC} = 6$，$\overline{AC} = 9$，$\overline{CD} = 12$

求證：(1) $\triangle ABC \sim \triangle DCA$　(2)求$\overline{AD}$之長



證明：(1)在$\triangle ABC$與$\triangle DCA$中

$\because \overline{AB} : \overline{BC} = 8:6 = 4:3$

且$\overline{CD} : \overline{AC} = 12:9 = 4:3$

$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{AC}$

又$\because \angle B = \angle ACD$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCA$(SAS 相似)

(2)$\because \triangle ABC \sim \triangle DCA$

$\therefore \overline{AC} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{AC}$

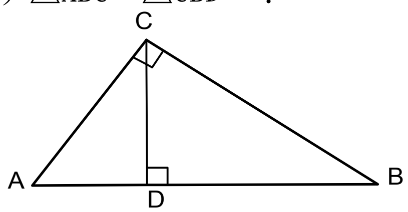
$9 : \overline{AD} = 6 : 9$，$\overline{AD} = 13.5$

【範例四】

$\triangle ABC$中，$\angle C = 90^0$，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$於 D，若$\overline{AC} = 3$，$\overline{BC} = 4$，求

(1) $\overline{AD} = ?$

(2) $\triangle ABC : \triangle CBD = ?$



解答：

(1) $\because \angle C = 90^0$

$\therefore \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，

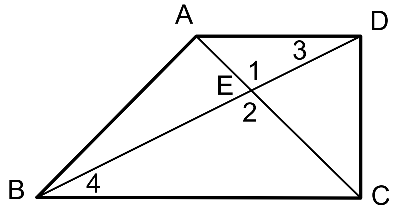
又$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{AC}^{\,2} = \overline{AD} \times \overline{AB}$

$\Rightarrow 3^2 = \overline{AD} \times 5$

【練習三】

ABCD 為一梯形$\overline{AD} // \overline{BC}$，$\overline{DC} \perp \overline{BC}$，$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}$，若$\overline{BC} = 10$，$\overline{CD} = 12$，求$\overline{CE}$之長。



解答：(1) $\because \overline{DC} \perp \overline{BC}$，$\therefore \angle ADC = 90^0$

$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

(2) $\because \overline{AD} // \overline{BC}$　$\therefore \angle 3 = \angle 4$

又$\because \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \triangle AED \sim \triangle CEB$(AA 相似)

$\Rightarrow \overline{AE} : \overline{CE} = \overline{AD} : \overline{BC} = 1:2$

設$\overline{CE} = x$，則$\overline{AE} = 13 - x$

$\Rightarrow (13 - x) : x = 1 : 2$，

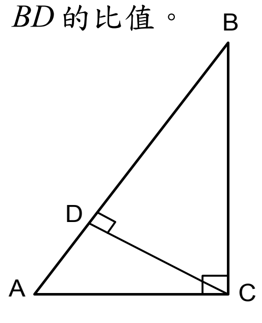
$x = 26 - 2x$

$x = \frac{26}{3}$

【練習四】

如圖，$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90^0$，$\angle CAB = 60^0$，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

求　$\overline{AD} : \overline{BD}$的比值。



解答：(1) 在$\triangle ABC$中

$\because \angle ACB = 90^0$，$\angle CAB = 60^0$

$\therefore \angle B = 30^0$

$\therefore \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$

設$\overline{AC} = x$，則$\overline{BC} = \sqrt{3}\,x$，$\overline{AB} = 2x$

(2) 在$\triangle ABC$中

$\because \angle ACB = 90^0$，且$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{9}{5}$

（2）$\therefore \overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=5-\frac{9}{5}=\frac{16}{5}$

∵同高

∴△ABC：△CBD＝$\overline{AB}$ ：$\overline{BD}$

＝5：$\frac{16}{5}$＝25：16

$\overline{AC}^2=\overline{AD}\times\overline{AB}$

$\overline{BC}^2=\overline{BD}\times\overline{AB}$

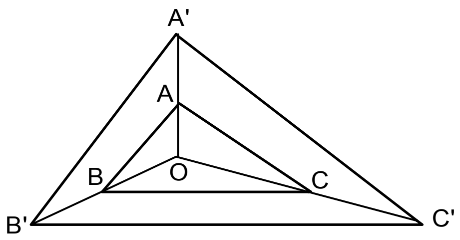
$\therefore \overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$

$=(x^2):(\sqrt{3}x)^2=\frac{1}{3}$

【範例五】

如圖，$\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{CC'}}{\overline{OC}}=\frac{1}{2}$，其中 A'、B'、C'分別在$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$的延長線上，

則$\frac{\Delta ABC\text{的面積}}{\Delta A'B'C'\text{的面積}}=$？



解答：(1)在△OA'B'中，

$\because \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \overline{AB}//\overline{A'B'}$

(2)同理可證：$\overline{BC}//\overline{B'C'}$，

$\overline{AC}//\overline{A'C'}$

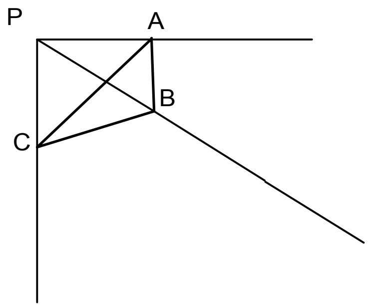
(3) ∴△ABC～△A'B'C'（三邊互相平行的兩△必相似）。

(4)$\therefore \frac{\Delta ABC\text{的面積}}{\Delta A'B'C'\text{的面積}}$

$=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA'}^2}=\frac{4}{9}$

【練習五】

如右圖，P 為 ΔABC 外一點，試分別在直線 PA、PB、PC 上各取一點 D、E、F，使 ΔDEF～ΔABC，而且 ΔDEF 面積是 ΔABC 面積的 4 倍。



作法：(1)在直線 PA 上取$\overline{AD}=\overline{PA}$

(2)在直線 PB 上取$\overline{BE}=\overline{PB}$

(3)在直線 PC 上取$\overline{CF}=\overline{PC}$

(4)連接$\overline{DF}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$線段，

則 ΔDEF 即為所求。