

## 相似三角形

兩個多邊形相似，需同時具有「對應角相等」，且「對應邊成比例」，才能確定這兩個多邊形相似。

兩三角形相似則只需部份條件成立即可，比如(1)對應角相等，便可說明兩三角形相似(AAA相似、AA相似性質)；或(2)對應邊成比例，便可說明兩三角形相似(SSS相似性質)；或(3)一對角相等，且兩夾邊對應成比例(SAS相似性質)，便可說明兩三角形相似，以下就此問題作進一步探討。

### 三角形的相似性質

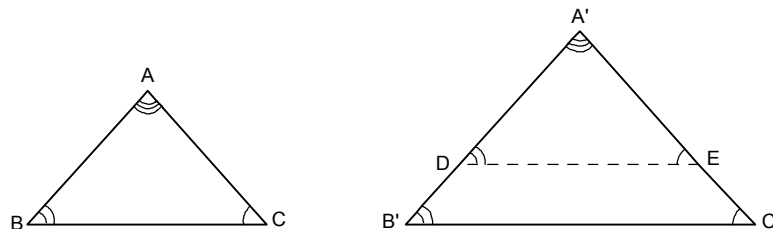
【AAA相似性質】如果兩個三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似。

【SSS相似性質】如果兩個三角形的三邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

【SAS相似性質】如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

現在就上列【AAA相似性質】、【SSS相似性質】、【SAS相似性質】3個性質來一一證明。

【AAA相似性質】如果兩個三角形的三內角對應相等，則這兩個三角形相似。



【已知】在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ 。

【求證】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

【證明】(1)設 $\overline{A'B'} > \overline{AB}$ ，在 $\overline{A'B'}$ 上取一點D，使得 $\overline{A'D} = \overline{AB}$ 。

(2)過D點作 $\overline{B'C'}$ 的平行線，交 $\overline{A'C'}$ 於E點，

則 $\angle A'DE = \angle B' = \angle B$ ， $\angle A'ED = \angle C' = \angle C$ 。

(3)在 $\triangle A'DE$ 與 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{A'D} = \overline{AB}$ ， $\angle A' = \angle A$ ， $\angle A'DE = \angle B$ ，

$\therefore \triangle A'DE \cong \triangle ABC$ ， $\therefore \overline{AC} = \overline{A'E}$ 。

(4)  $\because \overline{DE} \parallel \overline{B'C'}$ ， $\therefore \overline{A'D} : \overline{A'B'} = \overline{A'E} : \overline{A'C'}$ 。

(5)  $\because \overline{A'D} = \overline{AB}$ ， $\overline{A'E} = \overline{AC}$ ，代入(4)式得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$ 。

(6)同理可得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ 。

(7)由(5)與(6)可得 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ ，

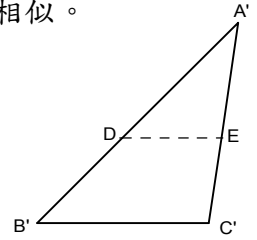
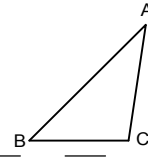
又 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ ，所以 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

**【SSS 相似性質】** 如果兩個三角形的三邊對應成比例，則這兩個三角形相似。

**【已知】** 在  $\triangle ABC$  與  $\triangle A'B'C'$  中， $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

**【求證】**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

**【證明】** (1) 設  $\overline{A'B'} > \overline{AB}$ ，在  $\overline{A'B'}$  上取一點 D，使得  $\overline{A'D} = \overline{AB}$ 。



(2) 過 D 點作  $\overline{B'C'}$  的平行線，交  $\overline{A'C'}$  於 E 點

$\angle A = \angle A'$ ， $\angle A'DE = \angle B'$ ， $\angle A'ED = \angle C'$  L L (i)

由 AAA 相似性質  $\Rightarrow \triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$ 。

$$\text{故 } \frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}}$$

(3)  $\because \overline{A'D} = \overline{AB}$ ，且  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

$$\therefore \overline{DE} = \overline{BC}，\overline{A'E} = \overline{AC}，$$

$$\therefore \overline{A'D} = \overline{AB}，\overline{DE} = \overline{BC}，\overline{A'E} = \overline{AC}$$

由 SSS 全等性質  $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'DE$ 。

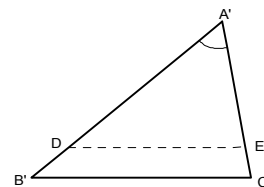
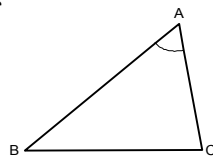
(4)  $\because \triangle ABC \cong \triangle A'DE$ ，

$\therefore \angle A' = \angle A$ ， $\angle A'DE = \angle B$ ， $\angle A'ED = \angle C$  (對應角相等) L L (ii)

由 (i) (ii)  $\Rightarrow \angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。

**【SAS 相似性質】** 如果兩個三角形的一角相等，而且夾此角的兩邊對應成比例，則這兩個三角形相似。



**【已知】** 在  $\triangle ABC$  與  $\triangle A'B'C'$  中， $\angle A = \angle A'$ ， $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$ 。

**【求證】**  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

**【證明】** (1) 設  $\overline{A'B'} > \overline{AB}$ ，在  $\overline{A'B'}$  上取一點 D，使得  $\overline{A'D} = \overline{AB}$ 。

(2) 過 D 點作  $\overline{DE}$ ，使得  $\angle A'DE = \angle B$ ，且 E 點在  $\overline{A'C'}$  上。

(3) 在  $\triangle ABC$  與  $\triangle A'DE$  中， $\because \angle A = \angle A'$ ， $\overline{AB} = \overline{A'D}$ ， $\angle B = \angle A'DE$ ，

由 ASA 全等性質  $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'DE$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'DE$ ，故  $\overline{A'E} = \overline{AC}$ ， $\overline{A'D} = \overline{AB}$ ， $\overline{DE} = \overline{BC}$  L L (i)

$$\angle A' = \angle A, \angle A'DE = \angle B, \angle A'ED = \angle C \quad \text{L L} \quad (\text{ii})$$

$$(4) \because \overline{A'D} = \overline{AB}, \overline{A'E} = \overline{AC}, \text{且 } \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$$

$$\therefore \overline{A'D} : \overline{A'B'} = \overline{A'E} : \overline{A'C'}, \text{故 } \overline{DE} // \overline{B'C'}.$$

$$(5) \because \overline{DE} // \overline{B'C'} \quad \therefore \triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'.$$

$$\therefore \triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$$

$$\therefore \angle A' = \angle A, \angle A'DE = \angle B, \angle A'ED = \angle C \quad \text{L L} \quad (\text{iii})$$

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}} \quad \text{L L} \quad (\text{iiii})$$

$$(6) \text{ 由 (i) (ii) (iii) (iiii)}$$

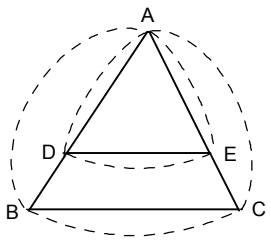
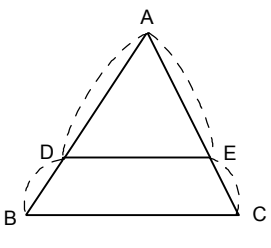
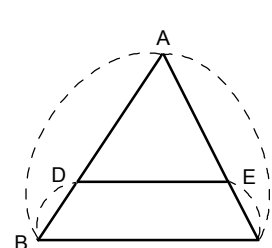
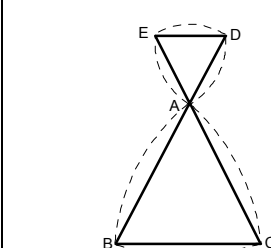
$$\Rightarrow \angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

### 有關相似三角形的計算

若  $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，便可延伸出以下四個常見的計算公式：

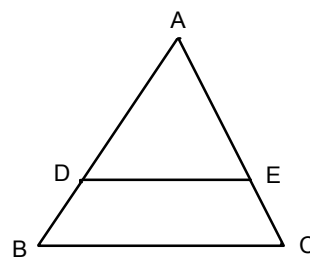
			
$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$	$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$	$\frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}$
$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} \\ = \overline{DE} : \overline{BC}$	$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$	$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$	$\overline{EA} : \overline{AC} = \overline{DA} : \overline{AB} \\ = \overline{ED} : \overline{BC}$

【已知】在  $\triangle ABC$  與  $\triangle ADE$  中， $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

【求證】 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$

【證明】在  $\triangle ABC$  與  $\triangle ADE$  中， $\ominus \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$  (線段成比例)



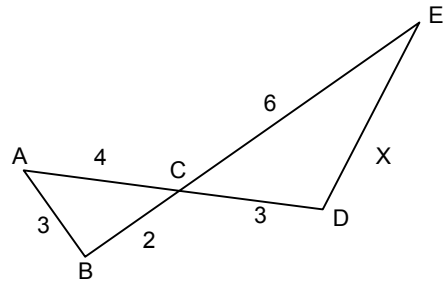
$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB} - \overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC} - \overline{AE}} \quad (\ominus \frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{d}{c-a})$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}, \text{ 同理可證, } \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

【範例】如圖，求  $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $\because \angle ACB = \angle DCE$  又  $\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{3}{2}$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ECD \Rightarrow \frac{X}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow X = \frac{9}{2}$$



【範例】

【已知】在  $\triangle ABC$  中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

【求證】 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  且  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 。

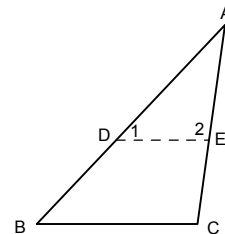
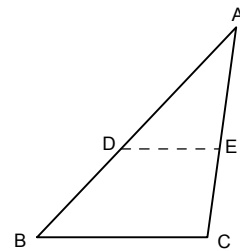
【證明】 $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \angle 1 = \angle B, \angle 2 = \angle C$

又  $\angle A = \angle A$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$  (AAA相似)。

則對應邊成比例，

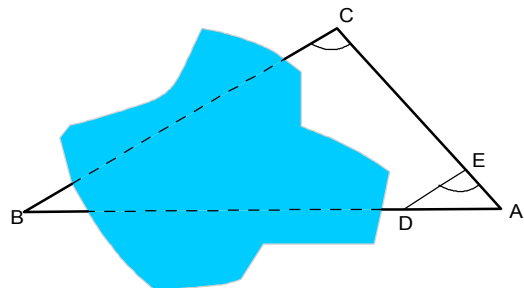
即  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 。



【範例】A、B兩點間有湖泊，為了求  $\overline{AB}$ ，我們先找一點C，量得  $\overline{AC} = 100$  公尺。

在  $\overline{AC}$  上取  $\overline{AE}$  為 20 公尺，過E點作  $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ ，使A、D、B三點共線，

量得  $\overline{AD} = 38$  公尺，求  $\overline{AB}$ 。



【解答】在  $\triangle ABC$  中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，所以

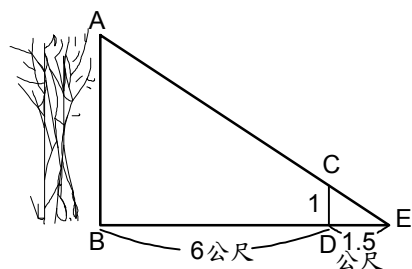
$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

因為  $\overline{AD} = 38$  公尺， $\overline{AE} = 20$  公尺， $\overline{AC} = 100$  公尺，設  $\overline{AB} = x$  公尺

所以  $38 : x = 20 : 100$

$$x = \frac{38 \times 100}{20} = 190 \text{ 公尺, 即 } \overline{AB} = 190 \text{ 公尺。}$$

【範例】如右圖，某人為了要測樹高 $\overline{AB}$ ，打了一根標桿 $\overline{CD}$ 於離樹根6公尺處D點，並在 $\overline{BD}$ 的延長線上找到一點E，使A、C、E三點成一直線。已知 $\overline{CD}=1$ 公尺，又測得 $\overline{DE}=1.5$ 公尺，求樹高 $\overline{AB}$ 。



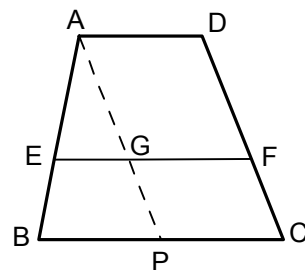
【解】(1)在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle CDE$ 中  
 $\because \angle ABE = \angle CDE = 90^\circ$ ， $\angle E = \angle E$   
 $\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE$  (AAA 相似)

$$(2) \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} \quad (\text{對應邊成比例})$$

$$\text{但 } \overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = 6 + 1.5 = 7.5 \text{ (公尺)}$$

$$\therefore \overline{AB} : 1 = 7.5 : 1.5 \Rightarrow \overline{AB} = \frac{7.5}{1.5} = 5 \text{ (公尺)}$$

【範例】如圖，ABCD為梯形，且 $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\overline{AD}=3$ 公分， $\overline{BC}=6$ 公分，且 $\overline{AE} : \overline{EB} = 3 : 2$ ，求 $\overline{EF}$ 的長。



【解】(1)過A作 $\overline{DC}$ 的平行線各交 $\overline{EF}$ 、

$\overline{BC}$ 於G、P則AGFD、GPCF都是平行四邊形

$$\Rightarrow \overline{GF} = \overline{PC} = 3 \text{ 公分}$$

(2)在 $\triangle ABP$ 中  $\because \overline{EG} \parallel \overline{BP}$

$$\therefore \overline{EG} : \overline{BP} = \overline{AE} : \overline{AB} = 3 : 5$$

$$\Rightarrow \overline{EG} : 3 = 3 : 5 \Rightarrow \overline{EG} = 1.8 \text{ 公分} \Rightarrow \overline{EF} = 4.8 \text{ 公分}$$

【範例】 $\angle ACD = \angle B$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{CD} = 9$ ， $\overline{BC} = 18$ ，則 $\overline{AB} = ?$   $\overline{AD} = ?$

【解】 $\because \angle A = \angle A$ ， $\angle ACD = \angle B \quad \therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$  (AAA 相似)

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{8}{\overline{AB}} = \frac{9}{18} = \frac{\overline{AD}}{8}$$

$$\therefore \overline{AB} = 16, \quad \overline{AD} = 4$$

**相似三角形的相關性質：**

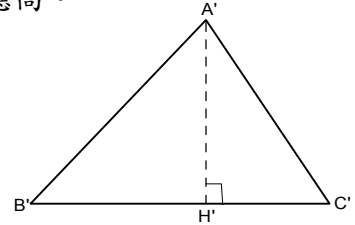
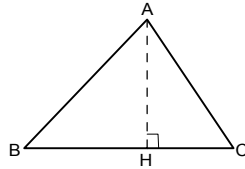
- 【性質 1】兩相似三角形對應高的比等於其對應邊的比。
- 【性質 2】兩個相似三角形周長的比等於對應邊的比。
- 【性質 3】兩個相似三角形對應分角線長的比等於任一組對應邊的比。
- 【性質 4】兩個相似三角形對應中線的比等於任一組對應邊的比。
- 【性質 5】兩個相似三角形面積的比等於對應邊平方的比。

現在就上列 5 個性質來一一證明：

【性質 1】兩相似三角形對應高的比等於其對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AH}$  與  $\overline{A'H'}$  是這兩個三角形的對應高。

【求證】 $\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ 。



【證明】(1) 在  $\triangle ABH$  與  $\triangle A'B'H'$  中，

$$\therefore \angle B = \angle B', \quad \angle AHB = 90^\circ = \angle A'H'B',$$

$$\therefore \angle BAH = \angle B'A'H'.$$

(2)  $\therefore \triangle ABH$  與  $\triangle A'B'H'$  的三內角對應相等，

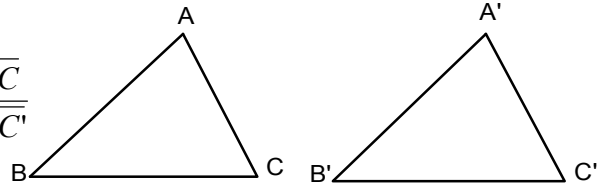
$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle A'B'H'.$$

$$(3) \therefore \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \quad \therefore \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}.$$

【性質 2】兩個相似三角形周長的比等於對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

【求證】 $\frac{\triangle ABC \text{ 周長}}{\triangle A'B'C' \text{ 周長}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$



【證明】(1)  $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$(2) \text{ 設 } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = r$$

$$\text{則 } \overline{AB} = r\overline{A'B'}, \quad \overline{BC} = r\overline{B'C'}, \quad \overline{CA} = r\overline{C'A'}$$

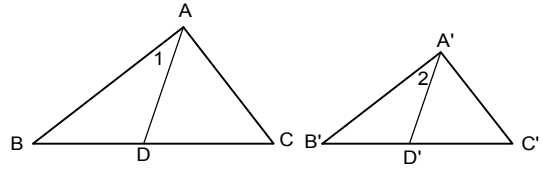
$$(3) \frac{\triangle ABC \text{ 周長}}{\triangle A'B'C' \text{ 周長}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{A'C'}} = \frac{r\overline{A'B'} + r\overline{B'C'} + r\overline{A'C'}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{A'C'}} = r$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC \text{ 周長}}{\triangle A'B'C' \text{ 周長}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

【性質 3】兩個相似三角形對應分角線長的比等於任一組對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AD}$ 、 $\overline{A'D'}$  分別為  $\angle A$ 、 $\angle A'$  的分角線

【求證】 $\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$



【證明】(1)  $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

$\therefore \angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$  (對應角)

(2) 在  $\triangle ABD$  與  $\triangle A'B'D'$  中

$$\because \angle B = \angle B' \text{ , 又 } \angle 1 = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \angle A' = \angle 2$$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$  (AA 相似)

(3)  $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$  (對應邊成比例)

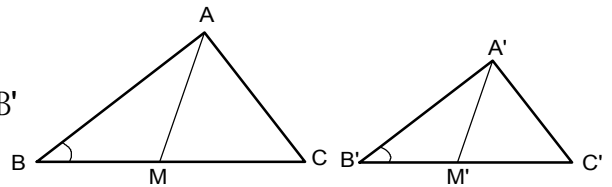
【性質 4】兩個相似三角形對應中線長的比等於任一組對應邊的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AM}$  為  $\overline{BC}$  上中線， $\overline{A'M'}$  為  $\overline{B'C'}$  上中線。

【求證】 $\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

【證明】(1)  $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$   $\therefore \angle B = \angle B'$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



(2) 又  $\overline{AM}$ 、 $\overline{A'M'}$  分別為  $\overline{BC}$ 、 $\overline{B'C'}$  上的中線

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\frac{1}{2}\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}}$$

(3) 在  $\triangle ABM$  與  $\triangle A'B'M'$  中

$$\because \angle B = \angle B' \text{ , } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}}$$

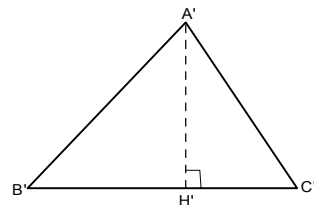
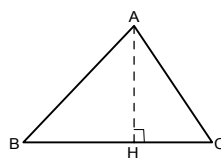
$\therefore \triangle ABM \sim \triangle A'B'M'$  (SAS 相似)

(4)  $\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$  (對應邊成比例)

【性質 5】兩個相似三角形面積的比等於對應邊平方的比。

【已知】 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{BC}$  與  $\overline{B'C'}$  為對應邊。

【求證】 $\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$ 。



【證明】(1) 設  $\overline{AH}$  與  $\overline{A'H'}$  為這兩個三角形的對應高。

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

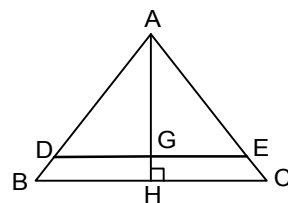
$$(2) \because \Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH},$$

$$\Delta A'B'C' \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'H'},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} &= \frac{\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}}{\frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'H'}} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AH}}{\overline{B'C'} \times \overline{A'H'}} \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

【範例】如右圖，設在  $\triangle ABC$  中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ，已知  $\overline{AH} = 2$  公尺， $\overline{BC} = 3$  公尺， $\overline{GH} = 0.5$  公尺，求  $\overline{DE}$ 。



【解】(1) 在  $\triangle ABC$  中， $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$(2) \therefore \frac{\overline{AG}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (\text{對應高的比等於對應邊的比})$$

$$\text{即 } (2 - 0.5) : 2 = \overline{DE} : 3$$

$$\Rightarrow \overline{DE} = \frac{1.5 \times 3}{2} = 2.25 \text{ (公尺)}$$



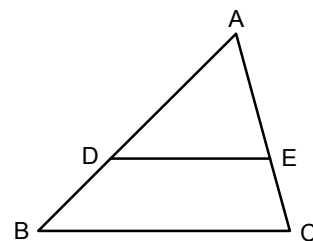
【範例】如右圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  且  $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 1$ ，那麼  $\triangle ADE$  : 四邊形 BDEC 為多少？

【解】

$$\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB} = 2 : 3$$

$$\therefore \triangle ADE : \triangle ABC = \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = 4 : 9$$

$$\therefore \triangle ADE : \text{四邊形 BDEC} = 4 : (9 - 4) = 4 : 5$$



### 直角三角形的相似性質：

我們很容易把一個直角三角形分成兩個直角三角形，而這兩個大小不等的直角三角形亦為相似的。

【定理】：直角三角形斜邊上的高，把原形分成兩個直角三角形與原來的三角形相似

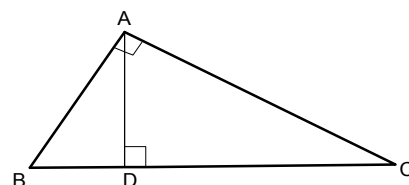
如下圖，證明  $\triangle ABC$  中， $\angle A$  為直角， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，則  $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ ， $\triangle CAD \sim \triangle CBA$ 。

【證明】

(1) 在  $\triangle ABD$  與  $\triangle CBA$  中，

$$\because \angle ADB = 90^\circ = \angle CAB, \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA. (\text{AA 相似})$$

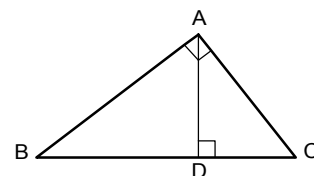


(2) 在  $\triangle CAD$  與  $\triangle CBA$  中，

$$\because \angle CAB = 90^\circ = \angle ADC, \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA. (\text{AA 相似})$$

【範例】 $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

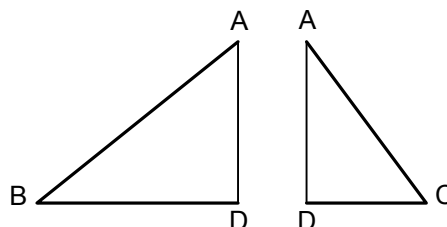


【求證】(1)  $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$  (2)  $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$  (3)  $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}$

【證明】 $\triangle ABC$  中， $\because \angle BAC = 90^\circ$  且  $\overline{AD} \perp \overline{BC} \therefore \triangle ABD \sim \triangle CAD \sim \triangle CBA$

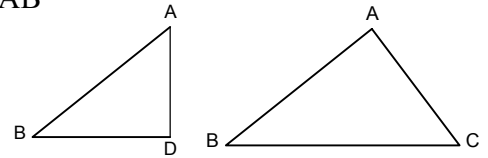
$$(1) \because \triangle ABD \sim \triangle CAD \therefore \overline{AD} : \overline{CD} = \overline{BD} : \overline{AD}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$$



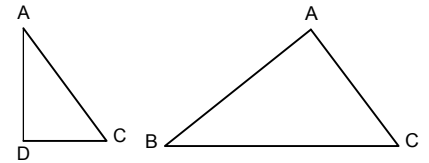
$$(2) \because \triangle ABD \sim \triangle CBA \quad \therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BD} : \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$$



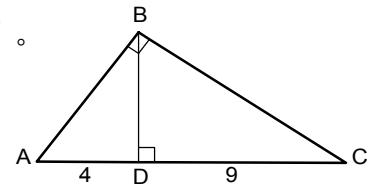
$$(3) \because \triangle CAD \sim \triangle CBA \quad \therefore \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}$$



【範例】如右圖， $\triangle ABC$  中  $\angle B$  為直角， $D$  為  $B$  到  $\overline{AC}$  的垂足。

已知  $\overline{CD} = 9$  公分， $\overline{AD} = 4$  公分，求  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{BD}$ 。



【解】(1)  $\overline{BD}^2 = \overline{AD} \times \overline{CD} = 4 \times 9 = 36$

$$\therefore \overline{BD} = \pm 6 \text{ (公分) } (-6 \text{ 不合})$$

(2) 在直角  $\triangle BDC$  中，

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} \\ &= \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \text{ (公分)} \end{aligned}$$

(3) 在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$  (公分)

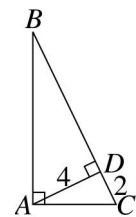
【範例】如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD}$  為斜邊  $\overline{BC}$  上的高，若  $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{CD} = 2$ ，試求：(1)  $\overline{AC} = ?$  (2)  $\overline{BD} = ?$

【解】(1)  $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$  (或  $2\sqrt{5}$ )

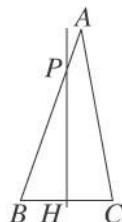
(2)  $\because \triangle ABD \sim \triangle CAD$

$$\therefore \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}, \quad \frac{\overline{BD}}{4} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \overline{BD} = 8$$



【範例】如圖，在  $\triangle ABC$  中， $\overline{BC}$  的中垂線分別與  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$  相交於  $P$ 、 $H$  兩點。已知  $\overline{BP} = 18$  公分， $\overline{AP} = 6$  公分， $\overline{BC} = 12$  公分，且  $\triangle ABC$  的面積為  $96\sqrt{2}$  平方公分，則  $\overline{PH} = ?$



【解】作  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$$\triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}$$

$$\therefore 96\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{AD} \quad \therefore \overline{AD} = 16\sqrt{2}$$

又  $\overline{PH} \perp \overline{BC} \quad \therefore \angle B = \angle B, \angle PHD = \angle ADB$  (AA性質)

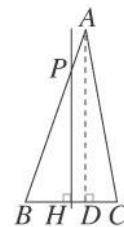
$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle PBH$

$$\therefore \overline{BP} : \overline{AB} = \overline{PH} : \overline{AD}$$

$$\therefore 18 : (18+6) = \overline{PH} : 16\sqrt{2}$$

$$\therefore 18 : 24 = \overline{PH} : 16\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PH} = 12\sqrt{2} \text{ (公分)}$$



【範例】如圖，將邊長為14公分的正方形  $PQRS$  放在矩形  $ABCD$  上，其中  $\overline{QR}$  疊在  $\overline{BC}$  上。今沿  $\overline{BP}$ 、 $\overline{CS}$  剪出  $\triangle PST$ ，結果頂點  $T$  恰好在  $\overline{AD}$  上，已知  $\overline{BC} = 42$  公分，試求  $\overline{AB} = ?$

【解】如下圖，作  $\overline{TH} \perp \overline{BC}$ ，設  $\overline{TH} = x$  公分，

則  $\overline{TK} = (x-14)$  公分

$$\therefore \overline{PS} \parallel \overline{BC}$$

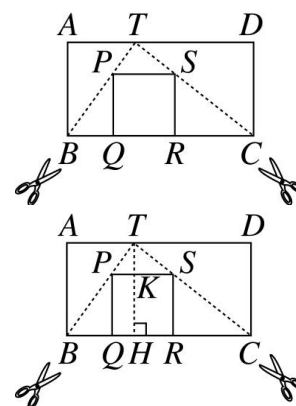
$$\therefore \overline{TK} : \overline{TH} = \overline{TP} : \overline{TB} = \overline{PS} : \overline{BC}$$

$$= 14 : 42 = 1 : 3$$

$$\therefore (x-14) : x = 1 : 3$$

$$3x - 42 = x, x = 21$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{TH} = 21 \text{ (公分)}$$



【範例】如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{BC} = 8$ ，又  $\overline{DE}$  是  $\overline{AC}$  的中垂線，

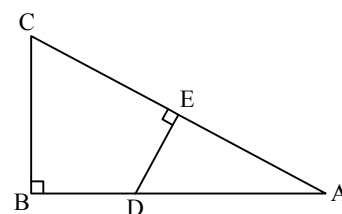
求  $\overline{DE} = ?$

$$\text{【解】 } \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17, \overline{AE} = \frac{17}{2}$$

又  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$  (AA)

$$\therefore \overline{AE} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$$

$$\therefore \frac{17}{2} : 15 = \overline{DE} : 8 \Rightarrow 15 \times \overline{DE} = 68 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{68}{15}$$

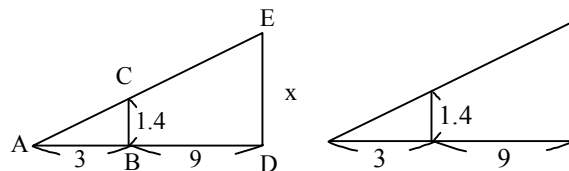


【範例】某大樓前有一盞探照燈，照在大樓前的牆壁上，小榮的身高為1.4公尺，站在離大樓9公尺，離探照燈3公尺處，則小榮在大樓牆壁上的人影高多少公尺？

【解】令人影為  $x$

⊙  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{1.4}{3} = \frac{x}{12} \quad \therefore x = 5.6$$



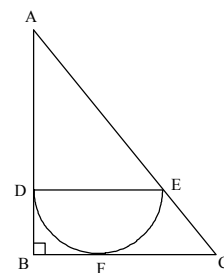
【範例】直角三角形 ABC 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $\overline{AB}=30$ ， $\overline{BC}=15$ ，內接半圓的直徑  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

且切  $\overline{BC}$  於 F，則  $\overline{FC}=?$

【解】令  $\overline{BD}=r \Rightarrow \overline{DE}=2r$ ， $\overline{AD}=30-r$ ， $\overline{FC}=15-r$ ， $\overline{BF}=r$

$$\ominus \triangle ABC \sim \triangle ADE \quad \therefore \frac{30}{15} = \frac{30-r}{2r} \Rightarrow 60r = 450 - 15r \Rightarrow r = 6$$

$$\therefore \overline{FC} = 15 - 6 = 9$$



【範例】如圖中， $\overline{AB}$ ， $\overline{CD}$ ， $\overline{MN}$  都和  $\overline{BC}$  垂直， $\overline{AB}=6$  公分， $\overline{CD}=18$  公分， $\overline{BC}=12$

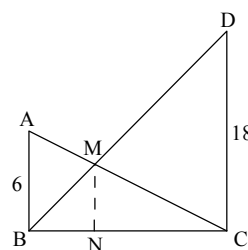
公分，則  $\overline{MN}$  之長為？

【解】令  $\overline{MN}=x$ ， $\overline{BN}=y$ ， $\overline{CN}=12-y$

$$\ominus \triangle BNM \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{又} \triangle CNM \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{x}{12-y} = \frac{1}{2} \dots \textcircled{2}$$

$$\text{由} \textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ 可得 } \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + y = 12 \end{cases}, y = 3, x = \frac{9}{2}$$



【範例】如圖，長方形 ABCD 中， $\overline{AC}$  為對角線， $\overline{AD}=9$  公分， $\overline{AB}=12$  公分，若  $\overline{AE} =$

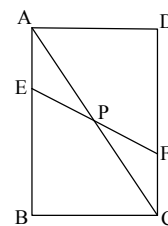
$\overline{CF}$ ，則  $\overline{AP}$  為多少公分？

【解】 $\ominus \angle PAE = \angle PCF$ ， $\angle APE = \angle CPF$ ， $\overline{AE} = \overline{CF}$

$$\therefore \triangle APE \cong \triangle CPF (\text{AAS})$$

$$\therefore \overline{AP} = \overline{CP}, \text{ 又 } \overline{AP} + \overline{CP} = \overline{AC} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

$$\therefore \overline{AP} = \frac{15}{2} = 7.5$$

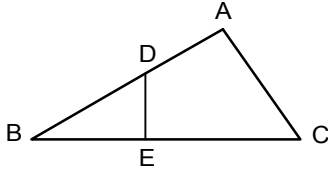




## 小 試 身 手

### 【範例一】

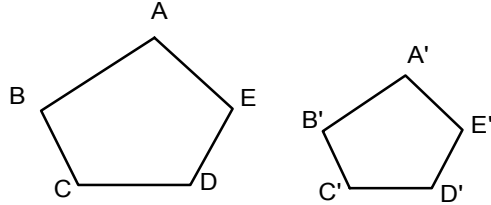
如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ， $D$  在  $\overline{AB}$  上且  $\overline{DE} \perp \overline{BC}$   
求證： $\triangle ABC \sim \triangle EBD$



證明：(1)  $\because \overline{DE} \perp \overline{BC} \quad \therefore \angle DEB = 90^\circ$   
又  $\because \angle A = 90^\circ \quad \therefore \angle A = \angle DEB$   
(2) 在  $\triangle ABC$  與  $\triangle EBD$  中  
 $\therefore \angle A = \angle DEB, \angle B = \angle B$   
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD$  (AA 相似)

### 【練習一】

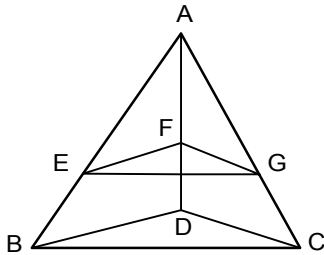
如圖，五邊形  $ABCDE \sim$  五邊形  $A'B'C'D'E'$   
求證： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



證明： $\because$  五邊形  $ABCDE \sim$  五邊形  $A'B'C'D'E'$   
 $\therefore \angle B = \angle B'$   
且  $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$   
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  (SAS 相似)

### 【範例二】

如圖， $D$  為  $\triangle ABC$  內部一點， $E$ 、 $F$ 、 $G$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AC}$  之中點  
求證： $\triangle EFG \sim \triangle BDC$

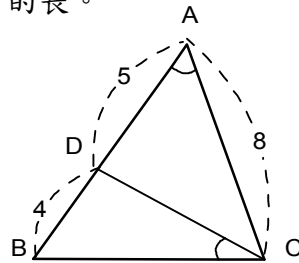


證明：在  $\triangle ABD$  中  
 $\because E$ 、 $F$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$  的中點  
 $\therefore \overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{BD} \Rightarrow \overline{EF} : \overline{BD} = 1 : 2$   
同理  $\overline{EG} : \overline{BC} = 1 : 2$ ，  
 $\overline{FG} : \overline{DC} = 1 : 2$   
 $\Rightarrow \overline{EF} : \overline{BD} = \overline{EG} : \overline{BC}$   
 $\quad \quad \quad = \overline{FG} : \overline{DC}$   
故  $\triangle EFG \sim \triangle BDC$  (SSS 相似)

### 【練習二】

如右圖， $\triangle ABC$  中， $\angle BCD = \angle A$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BD} = 4$

- (1) 求證： $\triangle BCD \sim \triangle BAC$
- (2) 求  $\overline{BC}$  的長。

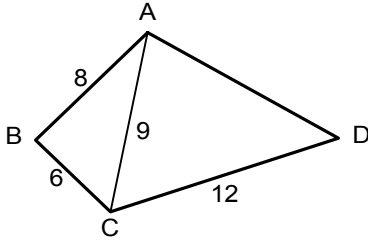


證明：(1) 在  $\triangle BCD$  與  $\triangle BAC$  中  
 $\because \angle BCD = \angle A, \angle B = \angle B$   
 $\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC$  (AA 相似)  
 $\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC$   
 $\therefore \overline{BC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{BC}$   
 $\overline{BC}^2 = (5+4) \times 4 = 36$   
 $\Rightarrow \overline{BC} = 6$  ( $-6$  不合)

**【範例三】**

如圖， $\angle B = \angle ACD$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{CD} = 12$

求證：(1)  $\triangle ABC \sim \triangle DCA$  (2) 求  $\overline{AD}$  之長



證明：(1) 在  $\triangle ABC$  與  $\triangle DCA$  中

$$\because \overline{AB} : \overline{BC} = 8 : 6 = 4 : 3$$

$$\text{且 } \overline{CD} : \overline{AC} = 12 : 9 = 4 : 3$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{AC}$$

$$\text{又 } \because \angle B = \angle ACD$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCA (\text{SAS 相似})$$

(2)  $\because \triangle ABC \sim \triangle DCA$

$$\therefore \overline{AC} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{AC}$$

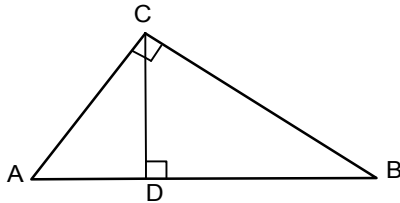
$$9 : \overline{AD} = 6 : 9, \overline{AD} = 13.5$$

**【範例四】**

$\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$  於  $D$ ，若  $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，求

(1)  $\overline{AD} = ?$

(2)  $\triangle ABC : \triangle CBD = ?$



解答：

$$(1) \because \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

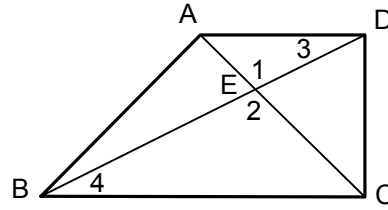
$$\text{又 } \overline{CD} \perp \overline{AB}$$

$$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}$$

$$\Rightarrow 3^2 = \overline{AD} \times 5$$

**【練習三】**

ABCD 為一梯形  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ，若  $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{CD} = 12$ ，求  $\overline{CE}$  之長。



解答：(1)  $\because \overline{DC} \perp \overline{BC}$ ， $\therefore \angle ADC = 90^\circ$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

(2)  $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$   $\therefore \angle 3 = \angle 4$

$$\text{又 } \because \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CEB (\text{AA 相似})$$

$$\Rightarrow \overline{AE} : \overline{CE} = \overline{AD} : \overline{BC} = 1 : 2$$

$$\text{設 } \overline{CE} = x, \text{ 則 } \overline{AE} = 13 - x$$

$$\Rightarrow (13 - x) : x = 1 : 2,$$

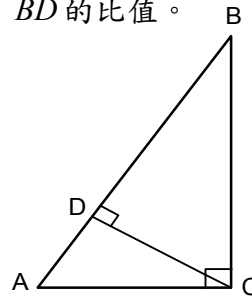
$$x = 26 - 2x$$

$$x = \frac{26}{3}$$

**【練習四】**

如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

求  $\overline{AD} : \overline{BD}$  的比值。



解答：(1) 在  $\triangle ABC$  中

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle CAB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$$\text{設 } \overline{AC} = x, \text{ 則 } \overline{BC} = \sqrt{3}x, \overline{AB} = 2x$$

(2) 在  $\triangle ABC$  中

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \text{ 且 } \overline{CD} \perp \overline{AB}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{9}{5}$$

$$(2) \therefore \overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$$

$\therefore$  同高

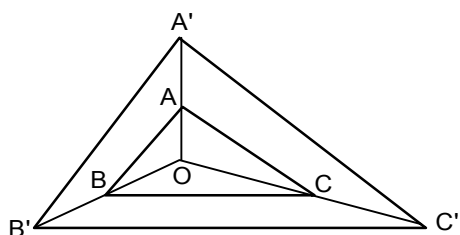
$$\therefore \triangle ABC : \triangle CBD = \overline{AB} : \overline{BD}$$

$$= 5 : \frac{16}{5} = 25 : 16$$

### 【範例五】

如圖， $\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OC}} = \frac{1}{2}$ ，其中  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  分別在  $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$  的延長線上，

則  $\frac{\triangle ABC \text{ 的面積}}{\triangle A'B'C' \text{ 的面積}} = ?$



解答：(1) 在  $\triangle OA'B'$  中，

$$\therefore \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$

(2) 同理可證： $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ，

$$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$$

(3)  $\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  (三邊互相平行的兩  $\triangle$  必相似)。

(4)  $\therefore \frac{\triangle ABC \text{ 的面積}}{\triangle A'B'C' \text{ 的面積}}$

$$= \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OA'}^2} = \frac{4}{9}$$

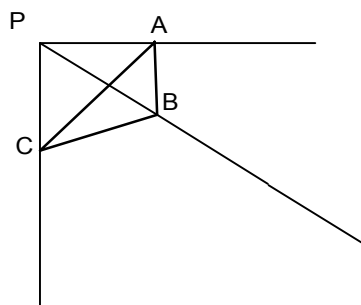
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \times \overline{AB}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AD} : \overline{BD} &= \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 \\ &= (x^2) : (\sqrt{3}x)^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

### 【練習五】

如右圖， $P$  為  $\triangle ABC$  外一點，試分別在直線  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$  上各取一點  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，使  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ ，而且  $\triangle DEF$  面積是  $\triangle ABC$  面積的 4 倍。



作法：(1) 在直線  $PA$  上取  $\overline{AD} = \overline{PA}$   
 (2) 在直線  $PB$  上取  $\overline{BE} = \overline{PB}$   
 (3) 在直線  $PC$  上取  $\overline{CF} = \overline{PC}$   
 (4) 連接  $\overline{DF}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$  線段，  
 則  $\triangle DEF$  即為所求。

