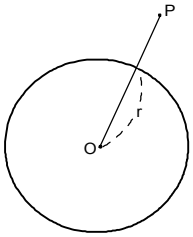
# 圓

## 點、直線與圓的關係

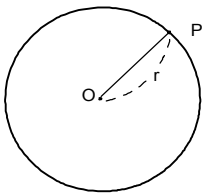
**點與圓的位置關係**

任意一點 P 與圓 0 的位置：將一點 P 慢慢向圓靠近，會有下列三種情形：

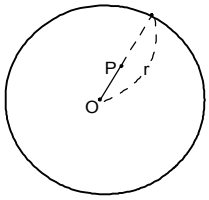
1. P 點在圓 0 外：如圖，即 $\overline{OP}>r$




2. P 點在圓 0 上：如圖，即 $\overline{OP}=r$



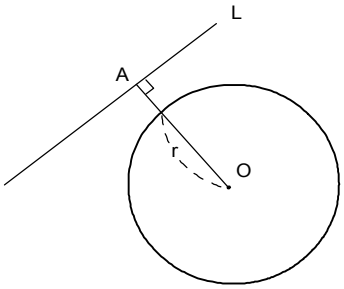

3. P 點在圓 0 內：如圖，即 $\overline{OP}<r$




**直線與圓的位置關係**

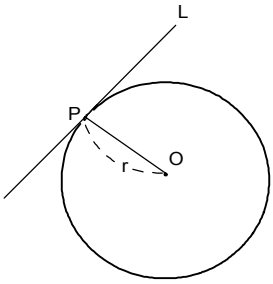
在平面上一圓與一直線位置關係：將一直線 L 慢慢向圓靠近，會有下列三種情形：

1. 不相交：直線 L 與圓 0 不相交，即直線 L 與圓 0 的距離 $\overline{OA}>r$（圓 0 的半徑）



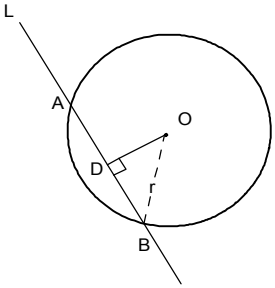
2. 相交於一點：直線 L 與圓 O 只交於 P 點，則直線 L 叫做圓 O 的**切線**，P 點叫做**切點**，

直線 L 與圓 O 的距離 $\overline{OP}$ ＝r（圓 O 的半徑）




3. 相交於兩點：直線 L 與圓 O 相交於 A 與 B 兩點，則稱直線 L 叫做圓 O 的**割線**。

直線 L 與圓 O 的距離 $\overline{OD}$ ＜r（圓 O 的半徑）




**切線性質：**

【性質 1】圓心到切線距離等於圓的半徑且圓心與切點的連線必垂直此切線。

【性質 2】過一圓直徑端點的垂線必為此圓切線。

1. 圓心到切線距離等於圓的半徑且圓心與切點的連線必垂直此切線。

【已知】L 為圓 O 之切線，切點為 P 點，圓的半徑為 r。

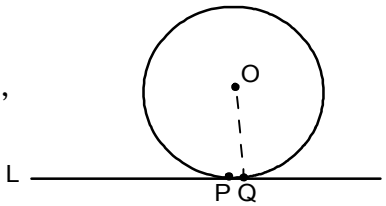
【求證】$\overline{OP}$ ＝r 且 L⊥ $\overline{OP}$

【證明】(i)自圓心 O 作直線 L 的垂線交 L 於 Q 點

(ii)若點 P 與 Q 點不是同一點，則△OPQ 中，

∵∠OQP＝$90^0$

∴ ∠OQP＞∠OPQ




⇒ $\overline{OP} > \overline{OQ}$，即 $\overline{OQ}$ ＜r

⇒Q 點在圓 O 的內部

(iii) ∵L 為圓 O 之切線，切點為 P 點

∴L 與圓 O 只交一點 P

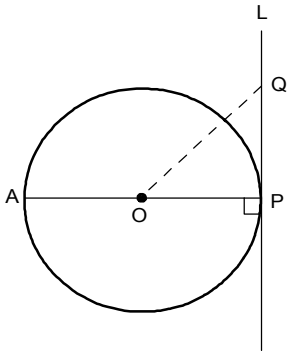
⇒L 上除了 P 點以外的均在圓 O 外部，與（ii）矛盾

⇒點 P 與 Q 點是同一點；即 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ ＝r ⇒ L⊥ $\overline{OP}$

2. 過一圓直徑端點的垂線必為此圓切線

【已知】$\overline{AP}$ 為圓 O 的直徑，L⊥ $\overline{AP}$ 。

【求證】L 為圓 O 的切線。




【證明】(1)設 Q 為 L 上異於 P 的任意一點，連接 $\overline{OQ}$ 。

(2)在直角三角形 OPQ 中，

∵ $\overline{OQ}$ 為斜邊， ∴ $\overline{OQ} > \overline{OP}$ 。

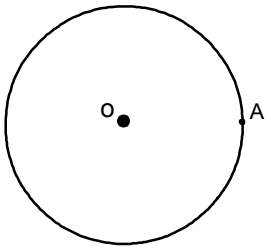
(3)∵ $\overline{OP}$ 是圓 O 的半徑且 $\overline{OQ} > \overline{OP}$ ，

∴ $\overline{OQ}$ 大於圓 O 的半徑，即 Q 在圓 O 外。

(4)∵L 上除了 P 以外的任意一點都在圓 O 外，

∴直線 L 與圓 O 僅相交於一點 P，即直線 L 與圓 O 相切於 P。

3. 切線作圖：過圓 O 上一點 A，求作圓 O 的切線

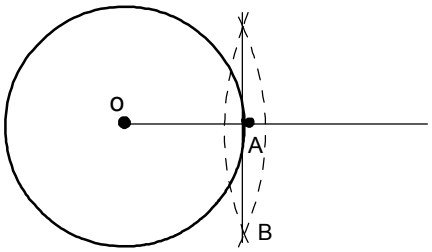



【已知】A 為圓 O 上一點。

【求證】過 A 作圓 O 的切線。

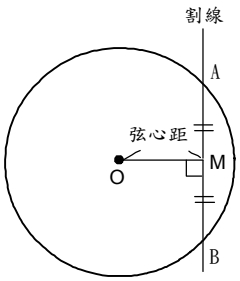
【求作】(1)作 $\overline{OA}$

(2)過 A 點作 $\overline{OA}$ 的垂線 $\overleftrightarrow{AB}$ ，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為所求




【證明】(1) ∵ $\overleftrightarrow{AB}$ ⊥ $\overline{OA}$ 於 A

(2) ∴ $\overleftrightarrow{AB}$ 是圓 O 的切線（過一圓半徑端點的垂線必為此圓切線）

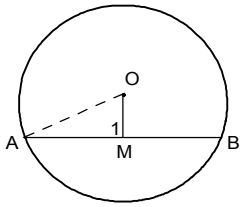


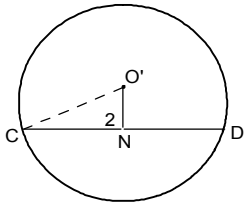

**弦心距**:圓心到弦的距離（這邊所指的距離是指圓心到弦的**垂直**距離）

如右圖，圓心 O 到弦 $\overline{AB}$ 的垂直距離 $\overline{OM}$ 即為此弦的弦心距。

弦心距的性質:

等圓中，如果兩弦相等，則它們的弦心距也相等，反之，如果兩弦的弦心距相等，則這兩弦相等



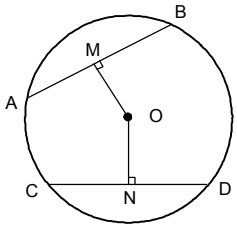



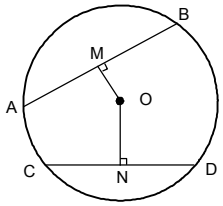

注意: 1. 通過圓心的弦是最長的弦，也就是直徑。

2. 在等圓(同圓)中，如果兩弦相等，則其弦心距也相等，反之亦然。

3. 在等圓(同圓)中，如果兩弦不相等，則較長弦的弦心距較短，如下圖:

$\overline{AB}=\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OM}=\overline{ON}$　　$\overline{AB}>\overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OM}<\overline{ON}$




【已知】圓 0 與 0' 是等圓，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{OM}$ 是 $\overline{AB}$ 的弦心距，$\overline{O'N}$ 是 $\overline{CD}$ 的弦心距。

【求證】$\overline{OM}=\overline{O'N}$ 。

【證明】(1)連接 $\overline{OA}$ 和 $\overline{O'C}$ ，則 $\overline{OA}=\overline{O'C}$ 。

(2)$\because \overline{OM}$ 是 $\overline{AB}$ 的弦心距，

$\therefore \overline{OM}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ ，　$\therefore \overline{AM}=\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ ，$\angle 1=90^0$ 。

(3)$\because \overline{O'N}$ 是 $\overline{CD}$ 的弦心距，

$\therefore \overline{O'N}$ 垂直平分 $\overline{CD}$ ，　$\therefore \overline{CN}=\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{CD}$ ，$\angle 2=90^0$ 。

(4)$\because \overline{AB}=\overline{CD}$ ，　$\therefore \overline{AM}=\overline{CN}$ 。

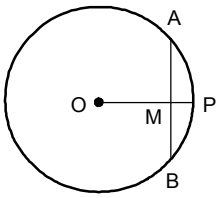
(5)$\because$△AOM 與△CO'N 都是直角三角形，且

$\overline{AO}=\overline{CO'}$ ，$\overline{AM}=\overline{CN}$ ，

$\therefore$△AOM≅△CO'N(RHS)　$\therefore \overline{OM}=\overline{O'N}$ 。

**有關弦心距的計算**：弦心距的計算問題多與垂直有關，因此常常會用到商高定理計算之。

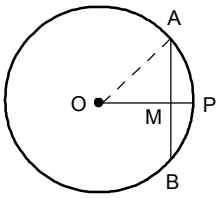
【範例】圓 O 的半徑是 17，弦 $\overline{AB}$ 垂直半徑 $\overline{OP}$ 且交於 M，$\overline{OM}=8$，求 $\overline{AB}$ 的長。




【解】(1)作 $\overline{OA}$　$\therefore \overline{AB}\perp\overline{OP}$

$\therefore \overline{AM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}$

$=\sqrt{17^2-8^2}=15$

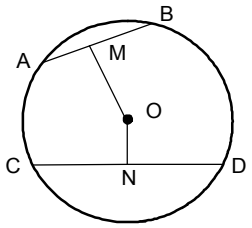



(2)$\because \overline{AB}\perp\overline{OP}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=30$

【範例】$\overline{AB}=6$ 公分，$\overline{CD}=8$ 公分，$\overline{AB}$ 的弦心距 $\overline{OM}$ 為 4 公分，

求 $\overline{CD}$ 的弦心距 $\overline{ON}$ 之長。

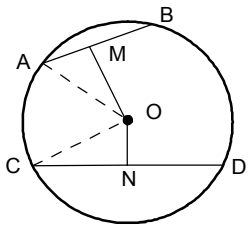



【解】(1)作 $\overline{OA}$、$\overline{OC}$，則 $\overline{OA}=\overline{OC}$

(2)在△AMO 中

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{OM}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5=\overline{OC}$

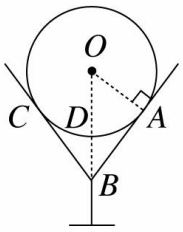



(3)在△CNO 中

$\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 8=4$

$\overline{ON}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CN}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$（公分）

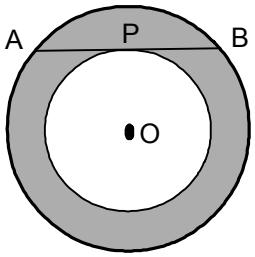
【範例】將乒乓球放入高腳杯內，若該球與杯子的接觸點為 $A$、$C$ 兩點，且球的半徑為 1.8 公分，$\overline{AB}=2.4$ 公分，則此球表面離杯底 $B$ 點最短的距離為多少公分？




【解】$\overline{OB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{1.8^2+2.4^2}=3$

$\overline{DB}=\overline{OB}-\overline{OD}=3-1.8=1.2$（公分）

【範例】左圖為兩個同心圓，$\overline{AB}$ 切小圓於 P 點，已知 $\overline{AB}$ 長為 10，則灰色面積為?



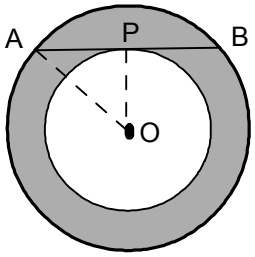

【解】連 $\overline{OP}$、$\overline{OA}$

$\because$ $\overline{AB}$ 為小圓切線、P 為切點

$\therefore \overline{OP}\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{PA}=\overline{PB}=5$

$\because \overline{OP}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overline{OA}^2=\overline{OP}^2+\overline{PA}^2$




灰色面積 $=\pi(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)$

$=\pi(\overline{PA}^2)$

$=25\pi$（平方單位）

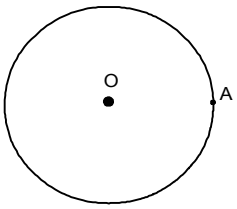
# 小　試　身　手

【範例一】

過圓 O 上一點 A，求作圓 O 的切線

已知：A 為圓 O 上一點

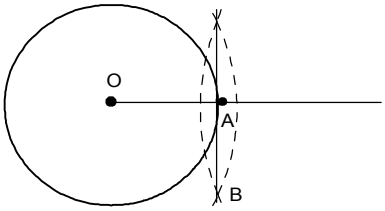
求作：通過 A，作圓 O 的切線




作法：(1)連接 $\overline{OA}$

(2)過 A 點作 $\overline{AO}$ 的垂線 $\overleftrightarrow{AB}$

則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為所求




【練習一】

$\overline{AB}$ 切圓 O 於 B，$\overline{AO}$ 交圓 O 於 C，$\overline{AB}=12$，$\overline{OC}=5$，求 $\overline{AC}$ 的長

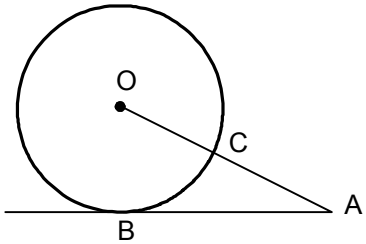
解答：作 $\overline{OB}$

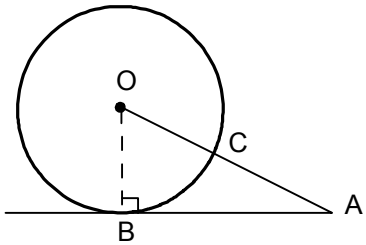
則 $\overline{OB}=\overline{OC}=5$

且 $\overline{OB}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overline{AO}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

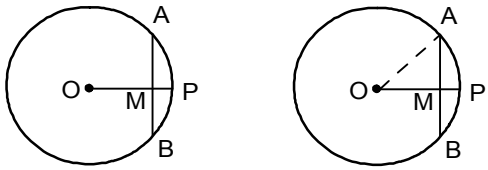
故 $\overline{AC}=13-5=8$




【範例二】

圓 O 的半徑是 15，弦 $\overline{AB}$ 垂直半徑 $\overline{OP}$ 且交於 M，$\overline{OM}=12$，求 $\overline{AB}$ 的長。




解答：(1)作 $\overline{OA}$　$\therefore \overline{AB}\perp\overline{OP}$

$\therefore \overline{AM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}$

$=\sqrt{15^2-12^2}=9$

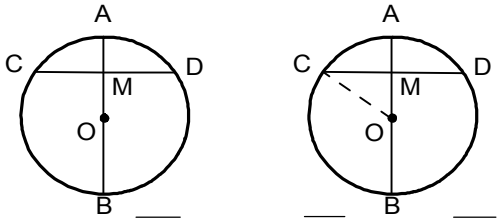
(2)$\because \overline{AB}\perp\overline{OP}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}$

$=2\times9=18$

【練習二】

圓 O 的直徑 $\overline{AB}$ 平分弦 $\overline{CD}$ 於 M 點，$\overline{CD}=6$ 公分，$\overline{AM}=1$ 公分，求 $\overline{AB}$ 的長。




解答：(1)作 $\overline{OC}$　$\because$ 直徑 $\overline{AB}$ 平分弦 $\overline{CD}$

$\therefore \overline{CM}=\frac{1}{2}\times6=3$ 且 $\angle OMC=90^0$

(2)設 $\overline{OC}=x$ 公分，

則 $\overline{OM}=(x-1)$ 公分

(3)在△OMC 中　$\because \angle OMC=90^0$

$\therefore \overline{OC}^2=\overline{OM}^2+\overline{CM}^2$，

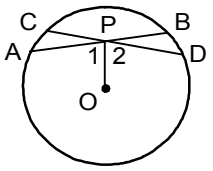
$x^2=(x-1)^2+3^2 \Rightarrow x=5$

(4) $\overline{AB}=2\overline{OC}=2\times5=10$

【範例三】

$\overline{AB}$、$\overline{CD}$是圓 O 中相等的兩弦相交於 P 點。

試證：$\angle 1=\angle 2$




證明：(1)作$\overline{OM}\perp\overline{AB}$於 M，$\overline{ON}\perp\overline{CD}$於 N

$\because \overline{AB}=\overline{CD}$

$\therefore \overline{OM}=\overline{ON}$

(2)在△OPM 與△OPN 中

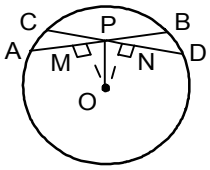
$\because \overline{OM}=\overline{ON}$

$\angle OMP=\angle ONP=90^0$，

$\overline{OP}=\overline{OP}$

$\therefore$△OPM≅△OPN(RHS)

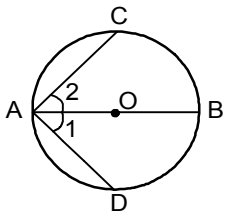
故$\angle 1=\angle 2$




【練習三】

$\overline{AB}$是圓 O 的直徑，$\angle 1=\angle 2$。

試證：$\overline{AC}=\overline{AD}$




證明：(1)作$\overline{OM}\perp\overline{AC}$於 M

$\overline{ON}\perp\overline{AD}$於 N

(2)在△AOM 與△AON 中

$\because \angle 1=\angle 2$

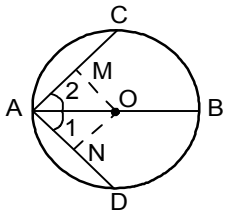
$\overline{AO}=\overline{AO}$

$\angle AMO=\angle ANO=90^0$

$\therefore$△AOM≅△AON(AAS)

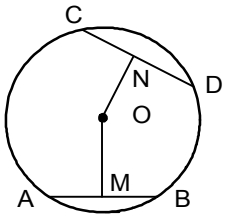
$\Rightarrow \overline{OM}=\overline{ON}$

故$\overline{AC}=\overline{AD}$（等弦對等弦心距）




【範例四】

$\overline{AB}=8$公分，$\overline{CD}=6$公分，$\overline{AB}$的弦心距$\overline{OM}$為 3 公分，求$\overline{CD}$的弦心距$\overline{ON}$之長。




解答：(1)作$\overline{OA}$、$\overline{OC}$

則$\overline{OA}=\overline{OC}$

(2)在△AMO 中

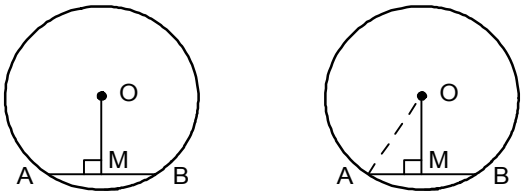
$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AM}^2+\overline{OM}^2}$

$=\sqrt{4^2+3^2}=5=\overline{OC}$

【練習四】

已知圓 O 的直徑是 26 公分，$\overline{AB}$是圓 O 的一弦，它的弦心距為 12 公分，求$\overline{AB}$的長。




解答：如圖，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{OM}=12$，

$\overline{OA}=\frac{1}{2}\times 26=13$

$\therefore \overline{AM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}$

$=\sqrt{13^2-12^2}=5$

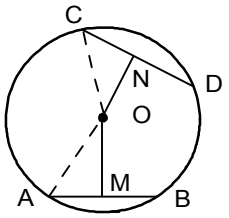
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\times 5=10$（公分）

(3)在△CNO 中

$\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\overline{ON}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CN}^2}=\sqrt{5^2-3^2}$

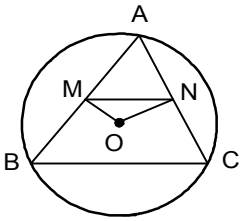
$=4$（公分）




【範例五】

圓 O 是△ABC 的外接圓，∠C＞∠B，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{AC}$。

試證：∠OMN＞∠ONM




證明：(1)在△ABC 中

∵∠C＞∠B　∴$\overline{AB}>\overline{AC}$

(2)∵$\overline{AB}>\overline{AC}$ 且 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$

，$\overline{ON}\perp\overline{AC}$

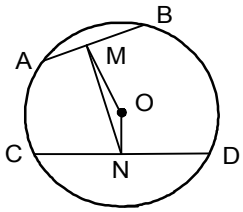
∴$\overline{OM}<\overline{ON}$（大弦對小弦心距）

(3)在△MON 中　∵$\overline{OM}<\overline{ON}$

∴∠OMN＞∠ONM

【練習五】

在圓 O 中，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$，$\overline{ON}\perp\overline{CD}$，∠OMN＜∠ONM。




試證：$\overline{CD}>\overline{AB}$

證明：(1)在△OMN 中

∵∠OMN＜∠ONM

∴$\overline{ON}<\overline{OM}$

(2)∵$\overline{ON}<\overline{OM}$

且 $\overline{ON}\perp\overline{CD}$，$\overline{OM}\perp\overline{AB}$

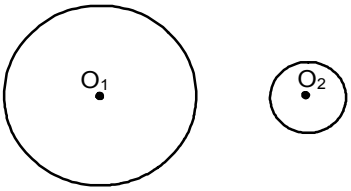
∴$\overline{CD}>\overline{AB}$（小弦心距對大弦）

# 兩圓的位置關係與公切線

**兩圓的位置關係：**我們如果兩圓慢慢靠近可以依序得到下列五種兩圓的位置關係

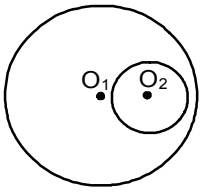
(一)兩圓不相交:

1. 兩圓**外離**：圖中，圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 兩圓外離。

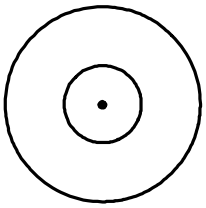



2. 兩圓**內離**：圖(一)中，圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 兩圓內離。

在內離的情況下，若圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 的圓心重疊，我們稱這兩圓為**同心圓**(如圖二)。



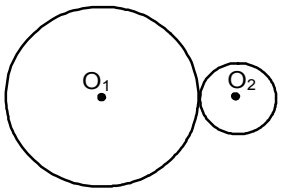

圖(一)



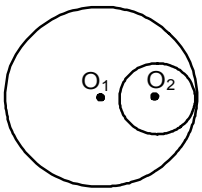
圖(二)

(二)兩圓相交於一點:

3. 兩圓**外切**：圖中，圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 兩圓外切。

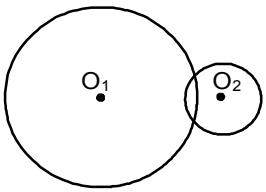



4. 兩圓**內切**：圖中，圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 兩圓內切。




＊這兩圓叫做**相切圓**，相切的點叫做**切點**。

(三)兩圓相交於兩點:圖中，圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 兩圓相交兩點。

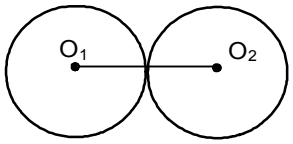


**連心線的定義及性質**

1. 連心線的定義：

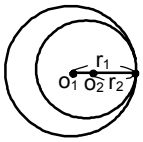
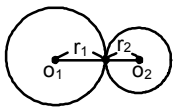
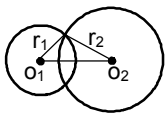
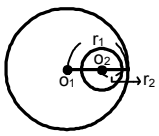
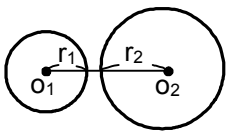
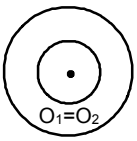
(1) 連心線: 平面上，兩圓的圓心分別為 $0_1$ 與 $0_2$，連接 $0_1$、$0_2$ 的直線，稱為這兩圓的連心線。

(2) 連心線長:為連接圓 $0_1$ 與圓 $0_2$ 的直線，稱為圓 $0_1$ 與圓 $0_2$ 的連心線，$\overline{O_1O_2}$ 為圓 $0_1$ 與圓 $0_2$ 兩圓心的距離，稱為圓 $0_1$ 與圓 $0_2$ 的連心線長。




(3) 連心線長與兩圓半徑的關係:

設圓 $0_1$ 的半徑為 $r_1$、圓 $0_2$ 的半徑為 $r_2$，則:

| 兩圓關係 | 圖示 | 連心線長與半徑關係 |
|---|---|---|
| 內切 |   | $\overline{O_1O_2}=\lvert r_1-r_2\rvert$ |
| 外切 |   | $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$ |
| 相交於兩點 |   | $\lvert r_1-r_2\rvert<\overline{O_1O_2}<r_1+r_2$ |
| 內離 |   | $\overline{O_1O_2}<\lvert r_1-r_2\rvert$ |
| 外離 |   | $\overline{O_1O_2}>r_1+r_2$ |
| 同心圓 |   | $\overline{O_1O_2}=0$ |

【範例 1】已知有兩圓半徑分別為 5 公分和 3 公分，若兩圓的位置關係是外切，則連心線長為何?

【解答】Θ 兩圓外切

∴連心線長＝兩半徑的和

＝5＋3＝8(公分)

【範例 2】若兩圓半徑分別為 5 公分和 3 公分，而連心線長為 4 公分，則兩圓的位置關係為何?

【解答】Θ 5－3＜4＜5＋3

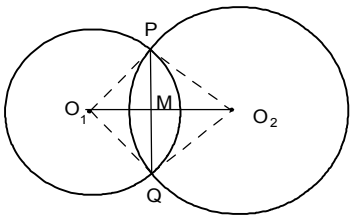
∴兩圓位置關係為相交兩點。

2.連心線的相關性質:

（1）兩圓相交於 P、Q 兩點，兩圓的連心線必垂直 $\overline{PQ}$

【已知】圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 相交於 P、Q 兩點，$\overline{PQ}$ 交 $\overline{O_1O_2}$ 於 M。

【求證】$\overline{O_1O_2} \perp \overline{PQ}$，$\overline{PM} = \overline{QM}$ 。



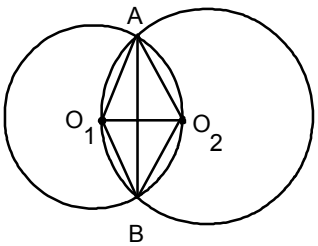

【證明】連接 $\overline{O_1P}$、$\overline{O_1Q}$、$\overline{O_2P}$、$\overline{O_2Q}$。

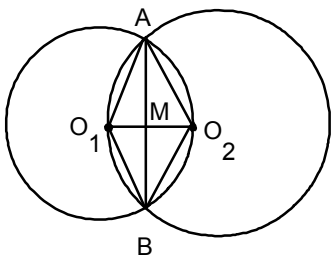
$\because \overline{O_1P} = \overline{O_1Q}$，$\overline{O_2P} = \overline{O_2Q}$，

$\therefore \overline{O_1O_2}$ 垂直平分 $\overline{PQ}$，$\overline{PM} = \overline{QM}$ 。

【範例】如下圖，圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 相交於 A、B 兩點，若 $\overline{O_1O_2} = 14$、$\overline{O_1A} = 13$、$\overline{O_1B} = 15$，

則 $\overline{AB}$ ＝?四邊形 A $O_1$B $O_2$ 的面積為?



【解答】設 $\overline{AB}$ 和 $\overline{O_1O_2}$ 交於 M 點，

且 $\overline{O_1M}=x$、$\overline{O_2M}=14-x$

在 $\Delta O_1AO_2$ 中，$\overline{AM}^2=\overline{O_1A}^2-\overline{O_1M}^2=\overline{O_2A}^2-\overline{O_2M}^2$

$\sqrt{13^2-x^2}=\sqrt{15^2-(14-x)^2}\ \Rightarrow x=5$

故 $\overline{AM}=\sqrt{13^2-5^2}=\pm 12$(負不合)

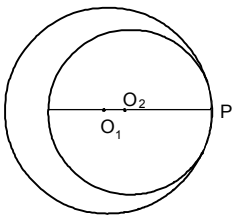
則 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\times 12=24$

$\because$ 在 $\Delta O_1O_2A=\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{AM}$

$=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$

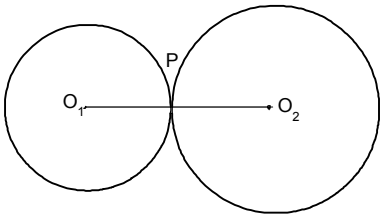
$\therefore$ 四邊形 $AO_1BO_2$ 面積 $=2\Delta O_1O_2A=2\times 84=168$(平方單位)

(2) 兩圓相切，則這兩圓的切點必在它們連心線上




【已知】如圖，圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 相交於 P。

【求證】P 點在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 上。




【證明】設 P 點不在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 上，

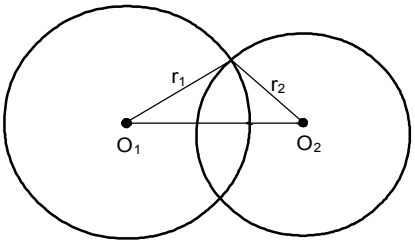
則圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 必有另一交點 Q。

但此與兩圓相切僅有一交點的事實互相矛盾，

所以 P 點不在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 的假設不能成立，因此 P 點必在 $\overset{\frown}{O_1O_2}$ 上。

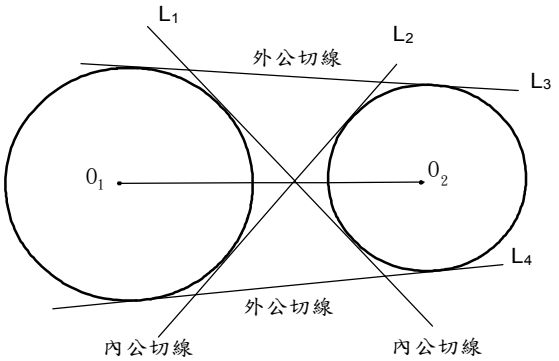
(3) 交於兩點的兩圓，其連心線長必小於這兩圓半徑的和，大於兩圓半徑之差

如圖圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 兩圓相交兩點，連心線長 $\overline{O_1O_2}$；$|r_1-r_2|<\overline{O_1O_2}<r_1+r_2$



**兩圓的公切線:**

(1)在平面上，如果直線 L 同時為兩圓的切線，則直線 L 稱為這兩圓的**公切線**，兩切點間的距離，稱為**公切線的長**。



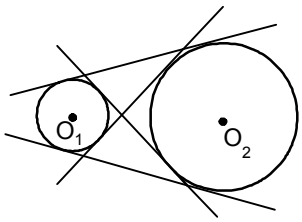

若一直線是兩圓的公切線，且兩圓分別在直線的兩側，則此直線稱為兩圓的內公切線；如上圖的 $L_1$ 與 $L_2$ 。

若一直線是兩圓的公切線，且兩圓分別在直線的同側，則此直線稱為兩圓的外公切線。如上圖的 $L_3$ 與 $L_4$ 。

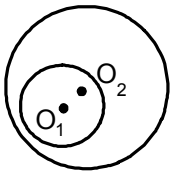
(2)根據兩圓的位置關係，其公切線有下列情形:

(一) 兩圓不相交

(a) 外離:4 條公切線

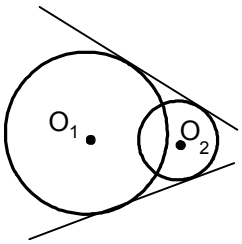



(b) 內離:沒有公切線

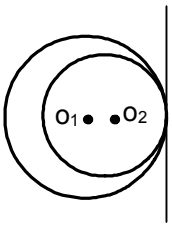



(二)兩圓相交

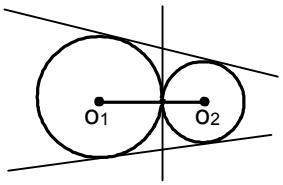
(a) 相交兩點:2 條公切線




(b)內切:1 條公切線




(c)外切:3 條公切線




**公切線的求法**

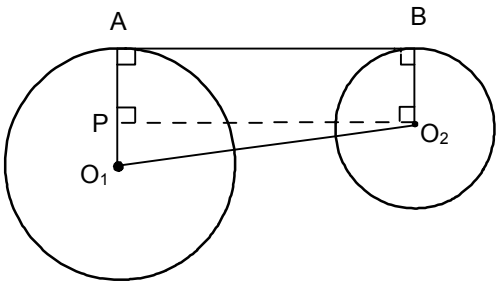
若 $r_1$、$r_2$ 為圓 $0_1$ 與圓 $0_2$ 的半徑，且 $r_1 > r_2$，$\overline{O_1O_2}$ 為連心線長，則

(1) 外公切線長＝$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$　　(2) 內公切線長＝$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$

【公式推導】

（1） 外公切線長：

如右圖，若 $r_1$、$r_2$ 為圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 的半徑，且 $r_1>r_2$，$\overline{O_1O_2}$ 為連心線長，求外公切線 $\overline{AB}$ 的長度?




【解】:過 $O_2$ 作 $\overline{O_2P}\perp\overline{O_1A}$ 於 P

$\Rightarrow APO_2B$ 為矩形

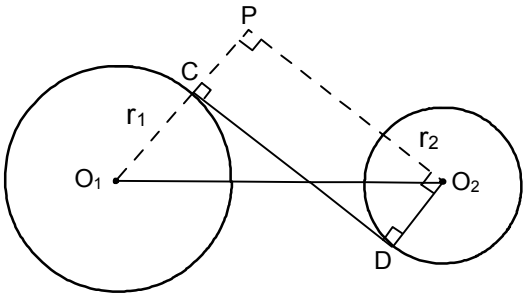
$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{O_2P}$

$=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_1P}^2}$

$=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$

（2）內公切線長：

如右圖，若 $r_1$、$r_2$ 為圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 的半徑，且 $r_1>r_2$，$\overline{O_1O_2}$ 為連心線長，求內公切線 $\overline{CD}$ 的長度?




【解】

過 $O_2$ 作 $\overline{O_2P}\perp\overline{O_1C}$ 於 P

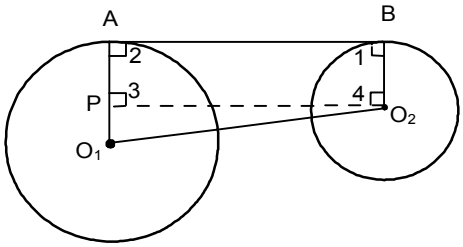
$\Rightarrow PCDO_2$ 為矩形

$\Rightarrow \overline{CD}=\overline{O_2P}$

$=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_1P}^2}$

$=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$

【範例】圓 $O_1$ 的半徑為 4，圓 $O_2$ 的半徑為 2，$\overline{O_1O_2}=10$，$\overline{AB}$ 分別外切圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 於 A 和 B 兩點，試求 $\overline{AB}$ 的長




【解】

（1）過 $O_2$ 作 $\overline{O_2P}\perp\overline{O_1A}$ 於 P

（2）$\because \angle1=\angle2=\angle3=\angle4=90^0$

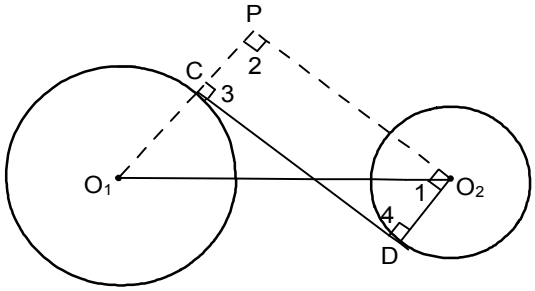
$\therefore APO_2B$ 為矩形

$\Rightarrow \overline{O_2P} = \overline{AB}$

（3）在$\triangle O_1PO_2$中　$\because \angle O_1PO_2 = 90^0$，$\overline{O_1P} = 4-2=2$

$\therefore \overline{AB} = \overline{PO_2} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1P}^2} = \sqrt{10^2-2^2} = 4\sqrt{6}$

【範例】圓$O_1$的半徑為4，圓$O_2$的半徑為2，$\overline{O_1O_2}=10$，$\overline{CD}$分別內切圓$O_1$與圓$O_2$於C和D兩點，試求$\overline{CD}$的長




【解】

（1）過$O_2$作$\overline{O_2P} \perp \overline{O_1C}$於P

連接$\overline{O_2D}$

（2）$\because \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^0$

$\therefore PCDO_2$為矩形$\Rightarrow \overline{O_2P} = \overline{CD}$

（3）在$\triangle O_1PO_2$中　$\because \angle O_1PO_2 = 90^0$，$\overline{O_1P} = 4+2=6$

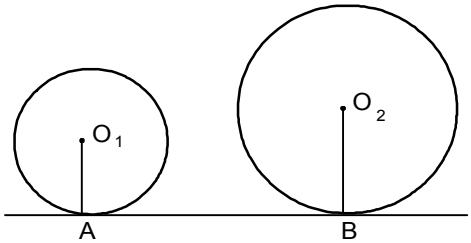
$\therefore \overline{CD} = \overline{PO_2} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1P}^2} = \sqrt{10^2-6^2} = \sqrt{64} = 8$

# 小 試 身 手

【範例一】

已知：$\overleftrightarrow{AB}$ 為圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 的外公切線，A、B 為切點

求證：$\overline{O_1A}//\overline{O_2B}$ 。




證明：(1)$\because \overline{AB}$ 與圓 $O_1$ 相切於 A，

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{O_1A}$ 。

(2)同理，$\overline{AB} \perp \overline{O_2B}$ 。

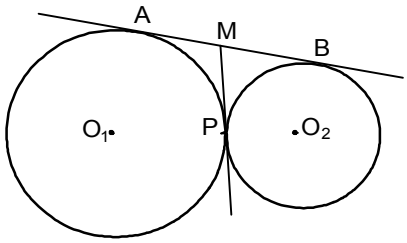
(3)$\because \overline{AB} \perp \overline{O_1A}$ 且 $\overline{AB} \perp \overline{O_2B}$ ，

$\therefore \overline{O_1A}//\overline{O_2B}$ 。

【練習一】

已知：圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 外切於 P，$\overset{\text{sum}}{MP}$ 為其內公切線，$\overset{\text{sum}}{AB}$ 為其外公切線，A 和 B 為切點，$\overline{AB}$ 與 $\overline{MP}$ 交於 M

試證：$\overline{MA}=\overline{MB}$ 。




證明：(1) $\because \overline{MA}$ 與 $\overline{MP}$ 過 M 點且都與圓 $O_1$ 相切

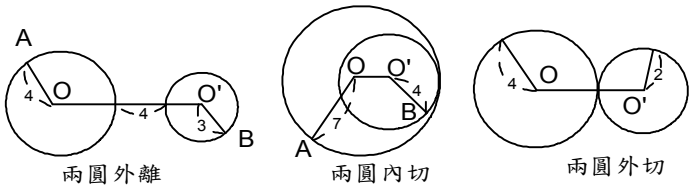
$\therefore \overline{MA}=\overline{MP}$ 。

(2)同理，$\overline{MB}=\overline{MP}$ 。

(3)由(1)與(2)可知 $\overline{MA}=\overline{MB}$ 。

【範例二】

求下列各圖中連心線 $\overline{OO'}$ 的長：




解答：(1) $\overline{OO'}=4+4+3=11$

(2) $\overline{OO'}=7-4=3$

(3) $\overline{OO'}=4+2=6$

【練習二】

(1)兩圓內切，其半徑分別為 6 與 3，求連心線的長。

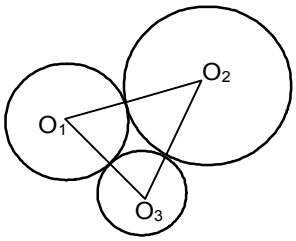
(2)兩圓外切，其半徑分別為 4 與 5，求連心線的長。

解答：(1)連心線長＝6－3＝3

(2)連心線長＝4＋5＝9

【範例三】

$0_1$、$0_2$和$0_3$分別是兩兩相互外切的三圓的圓心，已知$\overline{O_1O_2}=5$公分，$\overline{O_2O_3}=4$公分，$\overline{O_3O_1}=3$公分，求此三圓的半徑。




解答：設圓$0_1$、$0_2$、$0_3$的的半徑分別為

$r_1$、$r_2$、$r_3$

則$r_1+r_2=\overline{O_1O_2}=5$ ①

$r_2+r_3=\overline{O_2O_3}=4$ ②

$r_1+r_3=\overline{O_3O_1}=3$ ③

由①＋②＋③得

$2(r_1+r_2+r_3)=12$

$\therefore r_1+r_2+r_3=6$……④

④－①得$r_3=1$，④－②得$r_1=2$，

④－③得$r_2=3$

【練習三】

三圓兩兩外切，圓心分別為$0_1$、$0_2$、$0_3$，若$\overline{O_1O_2}=17$，$\overline{O_2O_3}=15$，$\angle 0_1 0_3 0_2=90^0$，求圓$0_2$之半徑。

解答：(1) $\because \angle 0_1 0_3 0_2=90^0$

$\therefore \overline{O_3O_1}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_2O_3}^2}$

$=\sqrt{17^2-15^2}=8$

(2)圓$0_2$的半徑

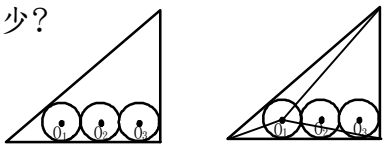
$=\frac{1}{2}\triangle 0_1 0_2 0_3$周長$-\overline{O_3O_1}$

$=\frac{1}{2}(17+15+8)-8$

$=20-8=12$

【範例四】

如圖，丸子三兄弟的身體都是等圓，他們住在$\Delta ABC$裡面。已知在$\Delta ABC$中，$\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=3$，$\angle C=90^0$，三個等圓除了互相外切外，與$\Delta ABC$三邊也各相切，則丸子三兄弟身體的半徑為多少?




解答：連$\overline{O_1B}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_1C}$，設等圓半徑為r

則$\Delta ABC=\Delta AO_1B+\Delta AO_1C+\Delta BO_1C$

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times r$

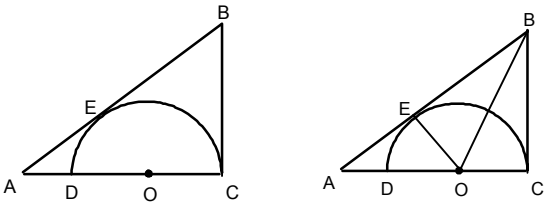
$+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times 5r$

$4\times 3=5r+4r+15r$

$24r=12\quad r=\frac{1}{2}$

【練習四】

如圖，$\Delta ABC$中，有一半圓圓心0在$\overline{AC}$上，且切$\overline{AB}$於E、切$\overline{BC}$於C，若$\overline{AC}=4$公分、$\overline{BC}=3$公分，則此半圓的半徑為多少?




解答：連$\overline{OE}$、$\overline{OB}$

$\because \overline{AB}$、$\overline{BC}$為半圓的切線

$\therefore \overline{AB}\perp\overline{OE}$、$\overline{BC}\perp\overline{OC}$

設$\overline{OE}=\overline{OC}=r$

$\because \Delta ABC=\Delta AOB+\Delta BOC$

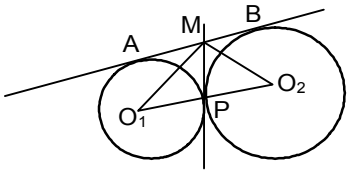
$\frac{1}{2}\times 4\times 3=\frac{1}{2}\times 5\times r+\frac{1}{2}\times 3\times r$

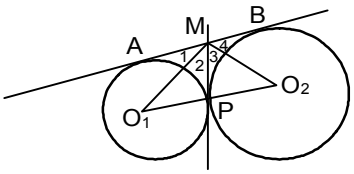
$\therefore r=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

【範例五】

圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 外切於 P，$\overleftrightarrow{MP}$ 為其內公切線，$\overleftrightarrow{AB}$ 為其外公切線，A 和 B 為切點，$\overline{AB}$ 與 $\overline{PM}$ 交於 M

試證：(1) $\overline{MA}=\overline{MB}$　(2) $\angle O_1MO_2=90^0$




證明：(1) $\because \overline{AB}$、$\overline{PM}$ 為圓 $O_1$ 與圓 $O_2$ 的公切線

$\therefore \overline{MA}=\overline{MP}$

$\overline{MB}=\overline{MP}$

$\therefore \overline{MA}=\overline{MB}$

$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

(2) $\because \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^0$

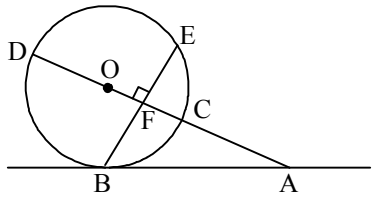
$\therefore 2(\angle 2+\angle 3)=180^0$

$\Rightarrow \angle 2+\angle 3=90^0$

即 $\angle O_1MO_2=90^0$

【練習五】

如圖，設 O 為圓 O 的圓心，$\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 B 點，$\overleftrightarrow{AO}$ 交圓 O 於 C、D 兩點，而弦 $\overline{BE}$ 垂直 $\overline{AD}$ 於 F 點，若 $\overline{AB}=12$、$\overline{AC}=8$，則 $\overline{BE}=$?




解答：連 $\overline{OB}$，$\because \overleftrightarrow{AB}$ 為切線

$\therefore \Delta OBA$ 為直角三角形

$\overline{OB}^2+\overline{AB}^2=\overline{AO}^2$

設 $\overline{OB}=r$

$r^2+12^2=(8+r)^2$

$r=5 \Rightarrow \overline{AO}=13$

在 $\Delta AOB$ 中

$\because \overline{OB}\times\overline{BA}=\overline{AO}\times\overline{BF}$

$5\times 12=13\times\overline{BF} \Rightarrow \overline{BF}=\dfrac{60}{13}$

$\therefore \overline{BE}=\dfrac{120}{13}$