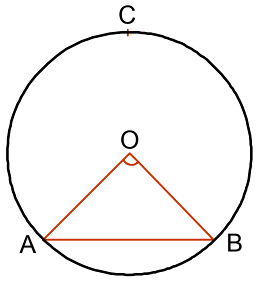
圓心角與弦弧間的關係

圓心角

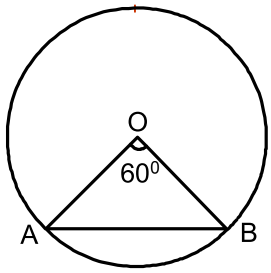
1. 圓心角的定義:在圓 O 中，任意兩半徑$\overline{OA}$和$\overline{OB}$，形成一個角∠AOB，叫圓心角

通常 $\overset{\frown}{AB}$ 是指∠AOB 所對的劣弧，而優弧則以 $\overset{\frown}{ACB}$ 表示。

※註：大於半圓的弧叫做優弧；小於半圓的弧叫做劣弧。



2. 圓心角的度數等於所對劣弧的度數，如圖，∠AOB＝$\overset{\frown}{AB}$ 的度數＝60^0



【範例】 A、B 兩點把圓 O 分成大小兩弧。大弧的度數等於小弧度數的 4 倍少 40^0，求 $\angle AOB$ 的度數?

【解答】設小弧為 X^0，則大弧為$(4X-40)^0$，於是

$X+(4X-40)=360$

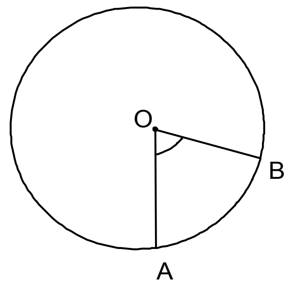
$5X=400$

$X=80$

∴小弧為 80^0。

∵ $\angle AOB$ 是小弧所對的圓心角，

∴ $\angle AOB=80^0$。



弧長：符號 $\overset{\frown}{AB}$ 有三種用法:表示弧 AB、表示弧 AB 的度數、表示弧 AB 的長

上面已經介紹過弧 AB 的度數＝圓心角的度數，現在來看看弧長的求法。

若 360^0 是圓周所對應的圓心角，則圓心角 x^0 對應的弧長＝$\frac{x}{360}$×圓周長

【範例】一圓的半徑是 5 公分，它的一個圓心角是 60^0，求這圓心角所對弧的長。

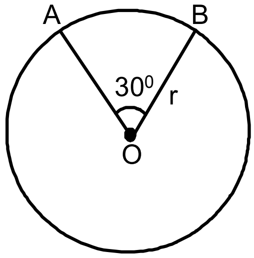
【解答】

∵圓的半徑是 5 公分，　∴圓周長＝$5\times2\pi=10\pi$（公分）。

∵圓心角是 60^0，∴其弧長＝$10\pi\times\frac{60}{360}=\frac{5\pi}{3}$（公分）

【範例】一圓的半徑是 r 公分，它的一個圓心角是 30^0，求這圓心角所對弧的長

【解答】



$\angle AOB=30^0$

$\overset{\frown}{AB}$ 的弧長＝$\frac{30^0}{360^0}\times2\pi r$

$=\frac{\pi}{6}r$

當 r 為 1 時，$\overset{\frown}{AB}$ 的度數＝$\frac{\pi}{6}$（＝30^0）

所以我們可知道 $\pi=180^0$

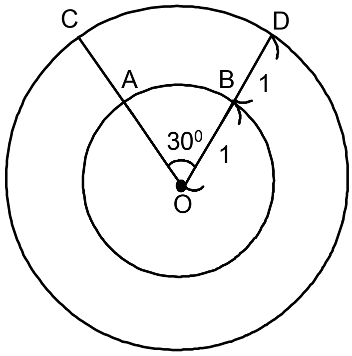
圓心角與弧長的關係

當兩個圓的圓心重疊為同心圓時，他們的圓心角相等，但弧長未必相等。

【已知】$\angle AOB=30^0$

【求證】$\overset{\frown}{AB}\neq\overset{\frown}{CD}$

【證明】



$\Theta\ \angle AOB=30^0$

$\therefore\ \overset{\frown}{AB}$ 弧長＝$\frac{30^0}{360^0}\times2\pi r$

$=\frac{\pi}{6}$　（r＝1）

$\overset{\frown}{CD}$ 弧長＝$\frac{30^0}{360^0}\times2\pi r$

$=\frac{\pi}{6}\times2$　（r＝2）

$\overset{\frown}{AB}$ 度數＝$30^0=\frac{\pi}{6}$

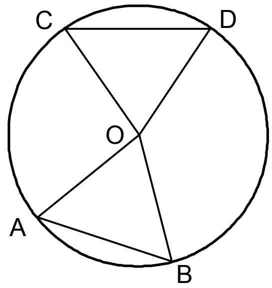
$\overset{\frown}{CD}$ 度數＝$30^0=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AB}$ 度數＝$\overset{\frown}{CD}$ 度數，但 $\overset{\frown}{AB}$ 弧長$\neq\overset{\frown}{CD}$ 弧長

圓心角與弧弦的對應關係

如果兩圓心角相等，則它們所對的弧長相等，所對的弦也相等

【已知】∠AOB＝∠COD。



【求證】$\overline{AB}=\overline{CD}$，AB＝CD

【證明】

（1）在△AOB 和△COD 中，

∵∠AOB＝∠COD，$\overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$，

∴△AOB≅△COD(SAS)，∴$\overline{AB}=\overline{CD}$。

（2）∠AOB＝$\overset{\frown}{AB}$＝∠COD＝CD

如果兩圓心角不等，則較大圓心角所對的弦長也較大

【已知】：∠AOB＞∠COD。

【求證】：$\overline{AB}>\overline{CD}$，$\overset{\frown}{AB}$＞$\overset{\frown}{CD}$

【證明】：

（1）在△AOB 與△COD 中，

∵$\overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$，

∠AOB＞∠COD，

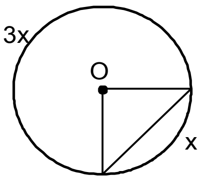
∴$\overline{AB}>\overline{CD}$。(樞杻定理)

（2）∠AOB＝$\overset{\frown}{AB}$＞∠COD＝$\overset{\frown}{CD}$

小 試 身 手

【範例一】

一弦把圓周分成兩弧，其中一弧的度數，是另一弧度數的三倍，求此弦所對的圓心角度數。



解答：設小弧的度數為 x^0，則另一弧的度數為 $3x^0$

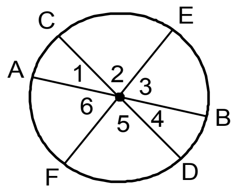
$\therefore x+3x=360^0$

$4x=360^0$

$x=90^0$

【練習一】

$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 皆為直徑，$\overset{\frown}{AC}=2x^0$，$\overset{\frown}{CE}=4x^0$，$\overset{\frown}{EB}=3x^0$，求 x 及∠4 和∠6。



解答：$\overline{AB}$ 為直徑

$\therefore 2x+4x+3x=180$

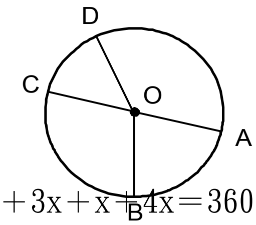
$9x=180$，$x=20$

$\angle 4=\angle 1=2\times 20^0=40^0$

$\angle 6=\angle 3=3\times 20^0=60^0$

【範例二】

圓 O 的半徑為 5 公分，$\angle AOB=2x^0$，$\angle BOC=3x^0$，$\angle COD=x^0$，$\angle DOA=4x^0$，求 x 及 $\overset{\frown}{BC}$ 的長。



解答：$2x+3x+x+4x=360^0$

$10x=360^0$　$\therefore x=36^0$

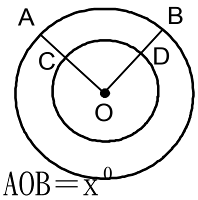
$\angle BOC=3\times 36^0=108^0$

$\overset{\frown}{BC}$ 的長 $=\dfrac{108}{360}\times 2\pi\times 5$

$=3\pi$（公分）

【練習二】

兩同心圓的半徑分別為 5 公分及 12 公分，設 AB 的長是 4π 公分，求 $\overset{\frown}{CD}$ 的長。



解答：設 $\angle AOB=x^0$

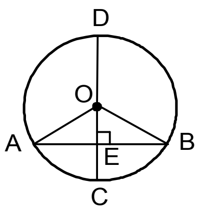
$4\pi=\dfrac{x}{360}\times 2\pi\times 12 \Rightarrow x=60^0$

$\overset{\frown}{CD}$ 的長 $=\dfrac{60}{360}\times 2\pi\times 5$

$=\dfrac{5}{3}\pi$（公分）

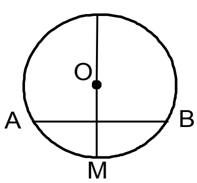
【範例三】

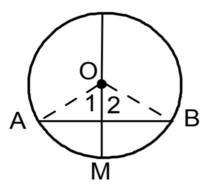
試證垂直於弦的直徑，必平分此弦所對的弧與圓心角。



【練習三】

試證連接圓心與弧中點的直線，必垂直平分此弧所對的弦。





已知：$\overline{CD}$是圓O的直徑

$\overline{AB}$是圓O的弦

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

求證：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\angle AOC=\angle BOC$

證明：在△AOE與ΔBOE中

∵$\angle AEO=\angle BEO=90^0$

$\overline{OA}=\overline{OB}$，$\overline{OE}=\overline{OE}$

∴△AOE≅△BOE(RHS)

故$\angle AOC=\angle BOC$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$（等圓心角對等弧）

已知：圓O中，M為AB的中點

求證：$\overleftrightarrow{OM}$垂直平分$\overline{AB}$

證明：(1)作$\overline{OA}$、$\overline{OB}$

則$\overline{OA}=\overline{OB}$

$\Rightarrow$ ΔAOB為等腰三角形

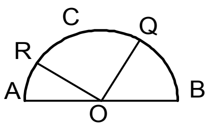
(2)∵$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$ ∴$\angle 1=\angle 2$

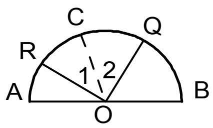
又∵△AOB為等腰三角形

∴$\overleftrightarrow{OM}$垂直平分$\overline{AB}$

【範例四】

$\overline{AB}$是圓O的直徑，R是$\overset{\frown}{AC}$的中點，Q是$\overset{\frown}{BC}$的中點。





試證：$\overline{OR} \perp \overline{OQ}$

證明：(1)作$\overline{OC}$

(2) ∵R是AC的中點，

Q是$\overset{\frown}{BC}$的中點

∴$\angle ROQ=\angle 1+\angle 2$

$=\overset{\frown}{RC}+\overset{\frown}{QC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC})$

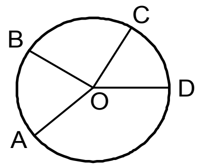
$=\frac{1}{2}\times 180^0$（∵$\overline{AB}$是直徑）

$=90^0$

故$\overline{OR} \perp \overline{OQ}$

【練習四】

$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$是圓O上的兩弧，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$



試證：$\angle AOC=\angle BOD$

證明：∵$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

∴$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BCD}$

故$\angle AOC=\angle BOD$

【範例五】

$\overline{AB}$為圓O之弦，$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DB}$

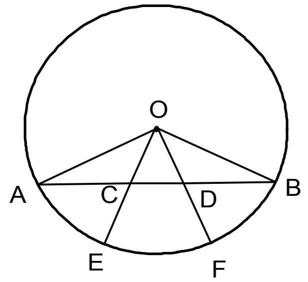
試證：(1)$\angle AOC=\angle BOD$

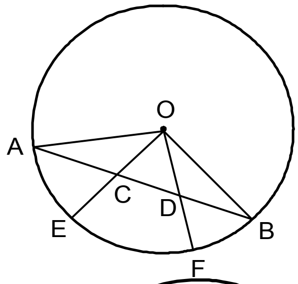
(2)$\angle COD>\angle AOC$

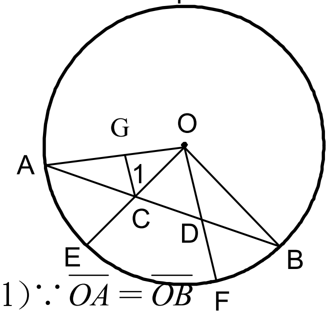
(3)$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}<\overset{\frown}{EF}$

【練習五】

如圖，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{EF}$







證明：(1)$\because \overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore \angle OAC=\angle OBC$

又$\because \overline{AC}=\overline{BD}$

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle OBD$(SAS)

$\therefore \angle AOC=\angle BOD$

(2)取$\overline{AO}$的中點 G，作$\overline{CG}$

$\because \overline{AC}=\overline{CD}$

$\therefore \overline{CG} // \overline{OD}$ 且 $\overline{CG}=\frac{1}{2}\overline{OD}$

$\because \overline{AO}=\overline{OF}>\overline{OD}$

$\therefore \frac{1}{2}\overline{AO}>\frac{1}{2}\overline{OD}$ 即 $\overline{OG}>\overline{CG}$

$\Rightarrow \angle 1>\angle AOC$

又$\angle COD=\angle 1$（$\because \overline{CG} // \overline{OD}$）

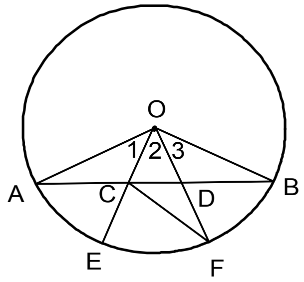
$\therefore \angle COD>\angle AOC$

(3)$\because \angle AOC=\angle BOD$　$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$

又$\because \angle AOC<\angle COD$

$\therefore \overset{\frown}{AE}<\overset{\frown}{EF}$

故 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}<\overset{\frown}{EF}$



試證：$\overline{CD}<\overline{AC}=\overline{DB}$

證明：(1)在△AOC 與△BOD 中

$\because \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$

$\therefore \angle 1=\angle 3$（等弧對等圓心角）

$\because \overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore \angle OAC=\angle OBD$

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD$(ASA)

$\Rightarrow \overline{AC}=\overline{DB}$……………（i）

(2)作$\overline{CF}$，在△OAC 與△OFC 中

$\because \overline{OA}=\overline{OF}$，$\overline{OC}=\overline{OC}$，

$\angle 1=\angle 2$（等弧對等圓心角）

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle OFC$(SAS)

故$\angle OAC=\angle OFC$（對應角相等）

$\overline{AC}=\overline{CF}$（對應邊相等）

(3)在△AOD 中，

$\angle FDC>\angle OAC$（三角形外角定理）

$\therefore \angle FDC>\angle OFC$

$\Rightarrow \overline{CF}>\overline{CD}$（大角對大邊）

即$\overline{AC}>\overline{CD}$…………（ii）

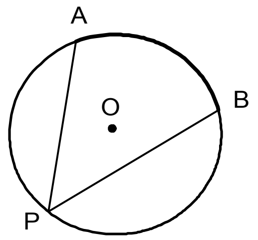
(4)由（i）、（ii）知

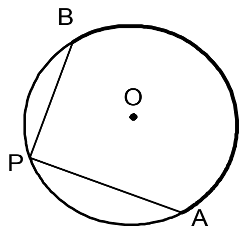
$\overline{CD}<\overline{AC}=\overline{DB}$

圓周角與弦切角

圓周角的定義

交點在圓周上的相交兩弦，其所形成的角叫做圓周角，如下圖，$\overline{PA}$ 、$\overline{PB}$ 是圓 O 中的兩弦，相交於圓周上一點 P，$\angle$APB 就是圓周角，$\overset{\frown}{AB}$ 是它所對的弧。

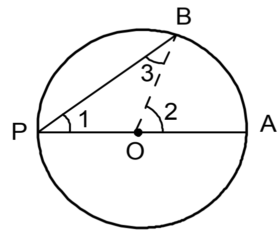




有關圓周角的性質

1. 圓周角的度數＝所對弧度數的一半

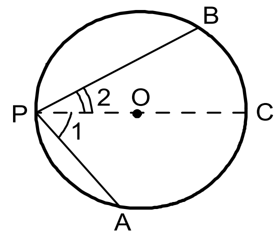
(1)圓心在圓周角的邊上。



【證明】$\because \overline{OP}=\overline{OB}$ $\therefore \angle 1=\angle 3=\frac{1}{2}\angle 2$

$\angle 2=\overset{\frown}{AB}$（$\angle 2$ 是圓心角）$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

(2)圓周角的一邊不是直徑,且圓心在圓周角的內部。

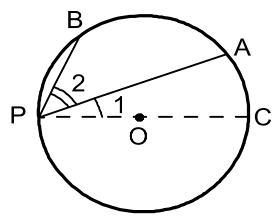


【證明】作直徑 $\overline{PC}$ $\because \angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$\therefore \angle APB=\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

(3)圓周角的一邊不是直徑,且圓心在圓周角的外部。



【證明】作直徑 $\overline{PC}$ $\because \angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

$\therefore \angle APB=\angle 2-\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

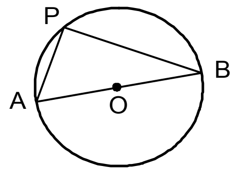
$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AC})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

2. 圓形中，直徑所對的圓周角必是直角。

【已知】圓 O 中，$\overline{AB}$ 是直徑。

【求證】$\angle APB = 90^0$

【證明】$\because \overline{AB}$ 是直徑　$\therefore \overset{\frown}{AB} = 180^0$



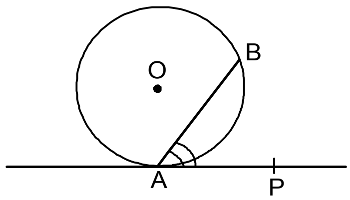
$$\angle APB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$$

弦切角

1. 弦切角的定義：一切線與過切點的弦所形成的角叫做弦切角。

如下圖，弦 $\overline{AB}$ 與過 A 點的切線 $\overline{AP}$ 所形成的角，

則 $\angle PAB$ 叫做圓 O 的弦切角。



2. 弦切角的性質：弦切角的度數等於其兩邊所夾弧度數的一半。

【已知】若 $\overline{PA}$ 切圓 O 於 A，$\angle PAB$ 為弦切角

【試證】$\angle PAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

【證明】 過 A 點作直徑 $\overline{AC}$。

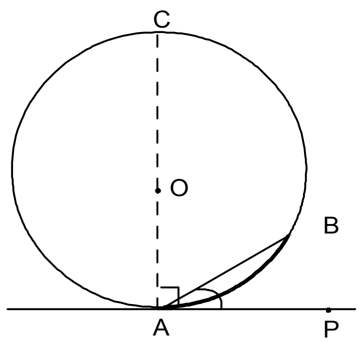
$$\because \angle PAC = 90^0 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC}，\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PAC - \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{BC})$$

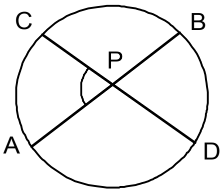
$$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$



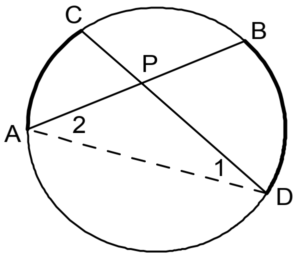
圓內角

1.圓內角的定義：交點在圓內的兩弦，其所形成的角叫做圓內角。

如右圖，兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$相交圓內一點P，則∠APC叫做圓內角。



2.圓內角的性質：圓內角的度數，等於此角及其對頂角所對兩弧度數和的一半。



【已知】：$\overline{AB}$、$\overline{CD}$兩弦相交於圓內一點P。

【求證】：$\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$，$\angle APD=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$

【證明】：(1)連接$\overline{AD}$。

(2)∵∠APC是△APD的一個外角，

∴$\angle APC=\angle 1+\angle 2$。

(3)∵∠1和∠2都是圓周角，

∴$\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

(4)由(2)與(3)得

$$\angle APC=\angle 1+\angle 2$$
$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$$
$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC})$$

(5)同理可證，

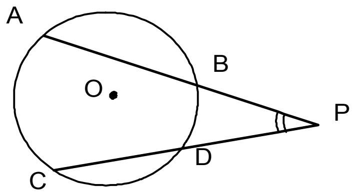
$$\angle APD=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$$

圓外角

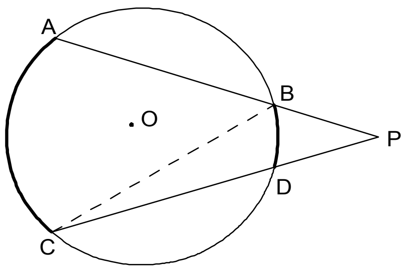
1. 圓外角的定義：兩割線相交於圓外，其所形成的夾角叫做外角。

如右圖，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 和直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 相交於圓外一點 P，

則∠APC 叫做圓外角。



2. 圓外角的性質：圓外角的度數等於其所夾大弧與小弧度數差的一半。



【已知】直線 AB 與 CD 相交於圓 O 外一點 P，$\overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{BD}$

【求證】$\angle APC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD})$

【證明】(1)連接 $\overline{BC}$ 。

(2) ∵∠ABC 為△BCP 的外角，
∴$\angle ABC = \angle APC + \angle BCP$
即 $\angle APC = \angle ABC - \angle BCP$

(3) ∵$\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle BCP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$，

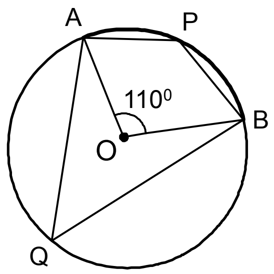
∴$\angle APC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD})$

有關圓周角與弦切角的計算

【範例】如右圖，$\angle AOB = 110^0$，則：

（1）$\angle AQB$ 為多少度?

（2）$\angle APB$ 為多少度?



【解】

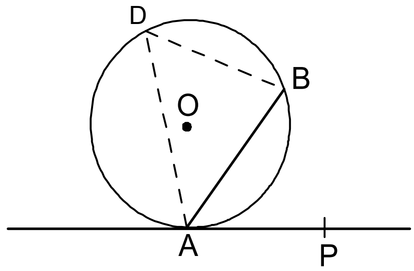
（1）$\angle AQB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 55^0$

（2）$\angle APB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AQB} = \frac{1}{2}(360^0 - 110^0) = 125^0$

【範例】如右圖，$\overset{\frown}{AB} = 160^0$，$\overline{AP}$ 為切線，則：

（1）$\angle BDA$ 為多少度?

（2）$\angle PAB$ 為多少度?



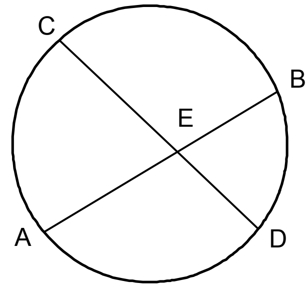
【解】

（1）$\angle BDA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 80^0$

（2）$\angle PAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 80^0$

【範例】$\overset{\frown}{AC} = 80^0$，$\overset{\frown}{BD} = 60^0$，求$\angle AEC$ 的度數。

【解】

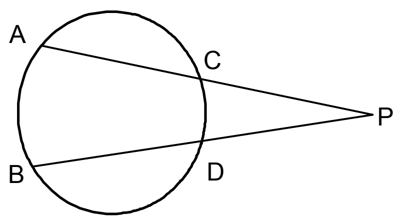


$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$$

$$= \frac{1}{2}(80^0 + 60^0) = 70^0$$

【範例】$\overset{\frown}{AB} = 60^0$，$\overset{\frown}{CD} = 20^0$，求$\angle P$ 的度數。

【解】



$$\angle P = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$$

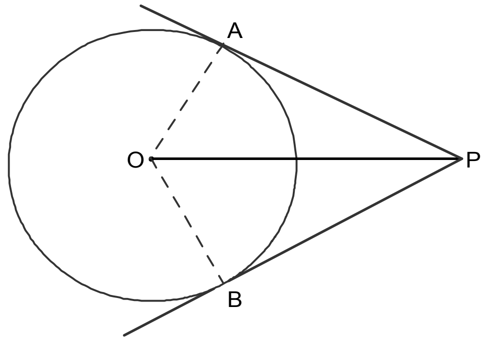
$$= \frac{1}{2}(60^0 - 20^0) = 20^0$$

圓外切四邊形

1. 切線性質：過圓外一點 P 所作的兩條切線等長，而且 $\overline{OP}$ 平分此兩條切線的夾角。

【已知】$\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 為圓 O 的兩切線，A、B 為切點，

【試證】$\overline{PA}=\overline{PB}$，$\angle$APO$=\angle$BPO。



【證明】(1)連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$。

(2)在△APO 與△BPO 中，

$\because \overline{OP}=\overline{OP}$，$\overline{OA}=\overline{OB}$，$\angle$OAP$=\angle$OBP$=90^0$，

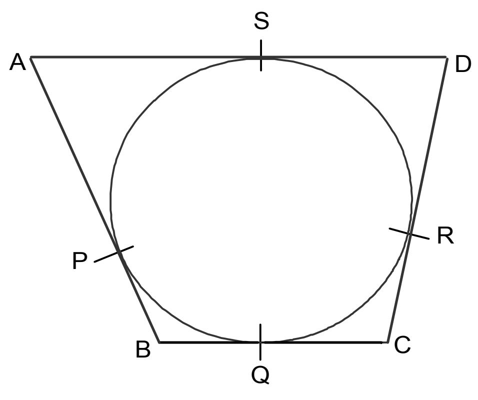
$\therefore$△APO≅△BPO(RHS)，

$\therefore \overline{PA}=\overline{PB}$，$\angle$APO$=\angle$BPO。

2. 圓外切四邊形的性質：圓外切四邊形的對邊長之和相等。

【已知】四邊形 ABCD 的四邊分別與圓相切

【試證】$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$



【證明】設 ABCD 分別與圓 O 相切於 P、Q、R、S 四點。

$\because \overline{AP}=\overline{AS}$，$\overline{BP}=\overline{BQ}$、$\overline{CR}=\overline{CQ}$、$\overline{DR}=\overline{DS}$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}=\overline{AS}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}$

即 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

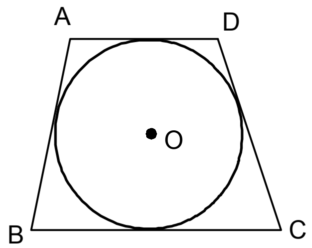
【範例】如右圖，ABCD 為一等腰梯形，$\overline{AD}//\overline{BC}$，

$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=8$，$\overline{BC}=18$，若一圓 O

與它的四邊相切，則：

（1）$\overline{AB}$ 為多少?

（2）梯形 ABCD 的面積為多少?



【解】

（1） 梯形 ABCD 為圓外切四邊形，設 $\overline{AB}=\overline{CD}=X$

$\therefore \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

$\Rightarrow 2X=8+18$

$\Rightarrow X=13=\overline{AB}$

（2） 分別過 A、D 兩點作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 、 $\overline{DF}\perp\overline{BC}$

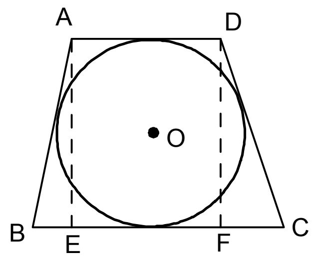
$\because \overline{BE}=\overline{CF}=\dfrac{18-8}{2}=5$

$\Rightarrow \overline{AE}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$\therefore$梯形 ABCD 的面積

$=\dfrac{(8+18)\times 12}{2}$

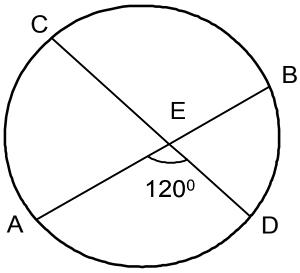
$=156$



小試身手

【範例一】

$\overset{\frown}{AC}=80^{0}$，$\angle AED=120^{0}$，求 $\overset{\frown}{BD}$ 的度數。



解答：$\angle AEC=180^{0}-120^{0}=60^{0}$

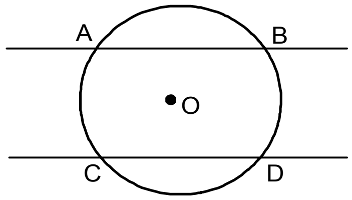
$\frac{1}{2}(80^{0}+\overset{\frown}{BD})=60^{0}$

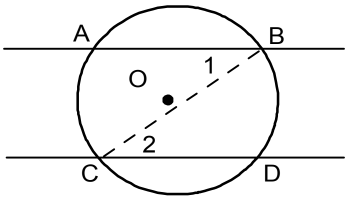
$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=40^{0}$

【範例二】

如圖，$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與圓 O 相交，且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$。

試證：$\overline{AB}//\overline{CD}$。





證明：(1)作 $\overline{BC}$

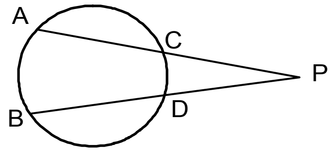
(2)$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

$\therefore \angle 1=\angle 2$（等弧對等圓周角）

故 $\overline{AB}//\overline{CD}$

【練習一】

$\overset{\frown}{AB}=60^{0}$，$\angle P=20^{0}$，求 $\overset{\frown}{CD}$ 的度數。



解答：$\frac{1}{2}(60^{0}-\overset{\frown}{CD})=20^{0}$

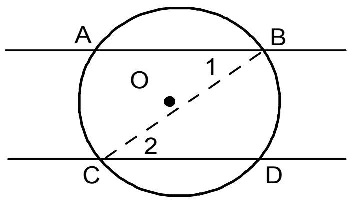
$60^{0}-\overset{\frown}{CD}=40^{0}$

$\overset{\frown}{CD}=20^{0}$

【練習二】

如圖，直線 AB、CD 與圓 O 相交，$\overline{AB}//\overline{CD}$。

試證：$\angle 1=\angle 2$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$



證明：$\because \overline{AB}//\overline{CD}$

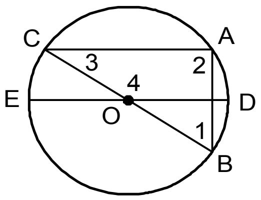
$\therefore \angle 1=\angle 2$（內錯角相等）

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$（等圓周角對等弧）

【範例三】

在圓 O 中，$\overline{AC}\,//\,\overline{DE}$ ，$\overline{DE}$ 和 $\overline{BC}$ 為直徑，

$\overset{\frown}{AC}$ 的度數為 80^0；求∠1、∠2、∠3、∠4 的度數。



解答：$\angle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\times 80^0 = 40^0$

$\because \overline{BC}$ 是直徑　$\therefore \angle 2 = 90^0$

$\Rightarrow \angle 3 = 180^0 - \angle 1 - \angle 2$

$= 180^0 - 40^0 - 90^0 = 50^0$

$\because \overline{AC}\,//\,\overline{DE}$

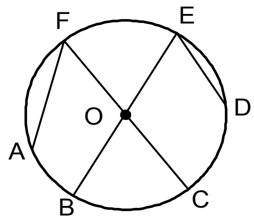
$\therefore \angle 4 = 180^0 - \angle 3 = 180^0 - 50^0$

$= 130^0$

【練習三】

如圖，在圓 O 中，$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$。

試證：$\angle AFC < \angle BED$



證明：$\because \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$

$\therefore \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow 2\angle AFC < 2\angle BED$

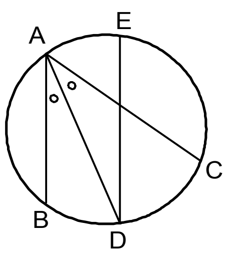
故 $\angle AFC < \angle BED$

【範例四】

如圖，$\overline{AD}$ 為圓周角∠BAC 的平分線，$\overline{AB}$ 、

$\overline{DE}$ 為兩弦且 $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$ 。

試證：$\overline{DE} = \overline{AC}$

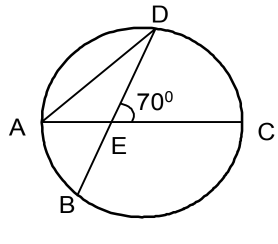


證明：(1) $\because \overline{AD}$ 為∠BAC 的平分線

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$

【練習四】

如圖，$\angle DEC = 70^0$，$\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB} = 20^0$，求∠DAC 的度數。



解答：$\because \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB}) = \angle DEC = 70^0$

$\therefore \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB} = 140^0$……………（i）

又 $\because \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB} = 20^0$……………（ii）

（i）＋（ii）得 $2\overset{\frown}{CD} = 160^0$

(2)$\because \overline{AB} // \overline{DE}$

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AE}$（平行弦截等弧）

(3)由(1)、(2)得

$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AE}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{CE}$

$\Rightarrow DCE = AEC$

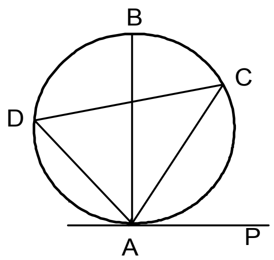
故 $\overline{DE} = \overline{AC}$（等弧對等弦）

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 80^{0}$

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2} \times 80^{0} = 40^{0}$

【範例五】

$\overline{AB}$ 為圓的直徑，$\overline{AP}$ 為切線，$\angle PAC = 60^{0}$，求 $\angle BAC$ 及 $\angle CDA$ 的度數。



解答：(1) $\because \overline{AB}$ 為直徑

$\overline{AP}$ 為切線

$\therefore \overline{BA} \perp \overline{AP}$

$\Rightarrow \angle BAC = 90^{0} - \angle PAC$

$= 90^{0} - 60^{0} = 30^{0}$

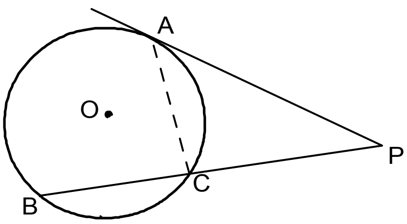
(2) $\angle CDA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

$= \angle PAC$（弦切角性質）

$= 60^{0}$

【練習五】

如圖，$\overline{PA}$ 切圓 O 於 A，$\angle P = 45^{0}$，$\overset{\frown}{AC} = 50^{0}$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



解答：$\because \angle P = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC})$

$\therefore 45^{0} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - 50^{0})$

$\overset{\frown}{AB} - 50^{0} = 90^{0}$

$\overset{\frown}{AB} = 140^{0}$