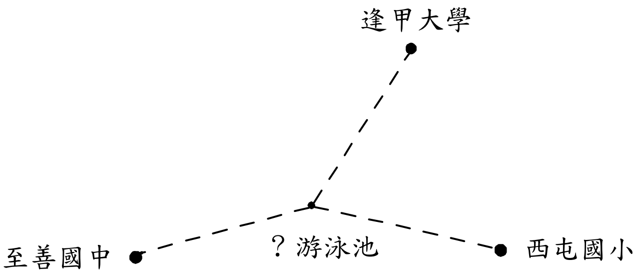
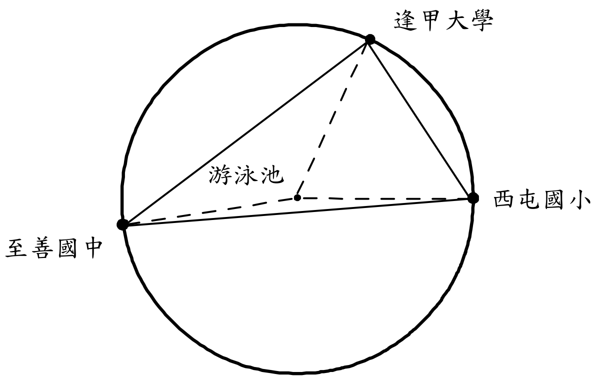
三角形的外心

　　市政府決定要在逢甲大學、至善國中及西屯國小中間蓋一座游泳池，為求公平游泳池必須離這三所學校一樣近（如下圖左），你知道游泳池的位置應該在哪裡嗎?



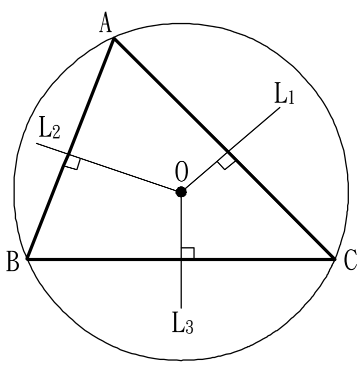


如果我們以游泳池為圓心，游泳池到這三所學校的距離為半徑畫圓，可以得到一圓通過這三所學校形成的三角形（如上圖右），則此圓我們稱為外接圓，游泳池稱為外心。

　　那麼到底如何找出三角形的外心呢?外心又有哪些性質呢?這一節我們將會討論此問題。

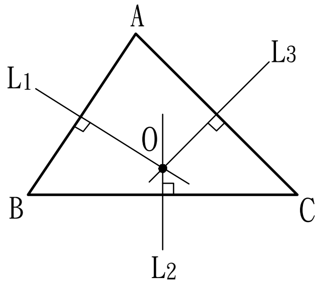
三角形外心的定義： 三角形三邊中垂線的交點，稱為三角形的外心。

如下圖中，L_1、L_2、L_3 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的中垂線，且相交於 O 點，則 O 為△ABC 的外心。以 O 為圓心，過 A、B、C 三點畫圓，則圓 O 叫做△ABC 的外接圓。

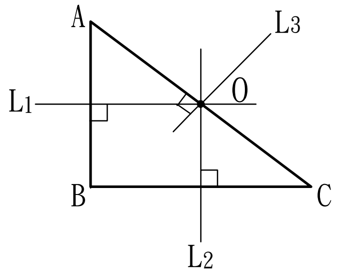


利用尺規作圖觀察三角形外心的位置：

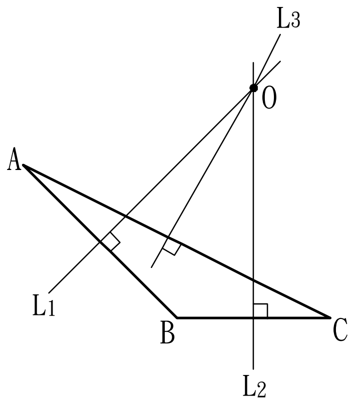
銳角三角形:外心在三角形的內部



直角三角形:外心在三角形的斜邊中點上



鈍角三角形:外心在三角形的外部



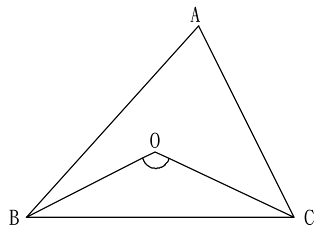
【結論】：外心不完全在三角形的內部。

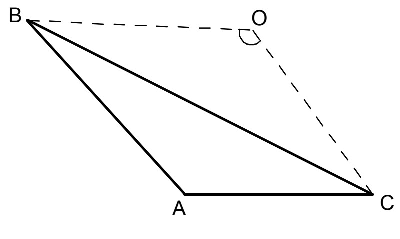
三角形外心的性質：1. 外心到三頂點的距離都相等。

2. 若 O 為△ABC 的外心，

則當(1) △ABC 為銳角三角形，∠A 小於 90^0時，∠BOC＝2∠A。

(2) △ABC 為鈍角三角形，∠A 大於 90^0時，∠BOC＝360^0－2∠A。

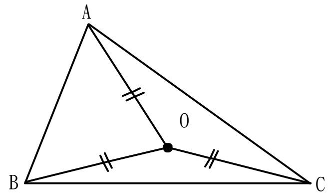




性質 1：給一△ABC，設其 O 點為外心，則 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$。(外心到三頂點的距離都相等)

【已知】 在△ABC 中，L_1 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，L_2 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，L_3 為 $\overline{CA}$ 的中垂線。

【求證】 L_1、L_2、L_3 相交於一點，且此點到三頂點的距離相等。



【證明】 (1) ∵△ABC 在一平面上

∴L_1、L_2 會相交於一點 O，連接 $\overline{AO}$、$\overline{BO}$、$\overline{CO}$。

(2) ∵L_1、L_2 是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的中垂線

∴ $\overline{AO}=\overline{BO}$，$\overline{BO}=\overline{CO}$

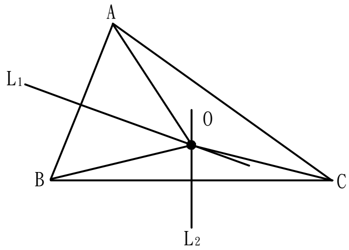
∴ $\overline{AO}=\overline{CO}$

∴O 點在 $\overline{AC}$ 的中垂線 L_3 上

即 L_1、L_2、L_3 相交於一點 O

(3) ∵ $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$，

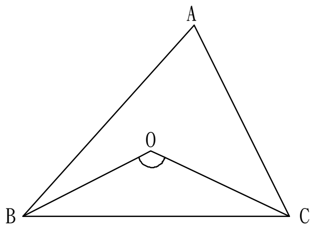
∴O 點到三頂點的距離相等。



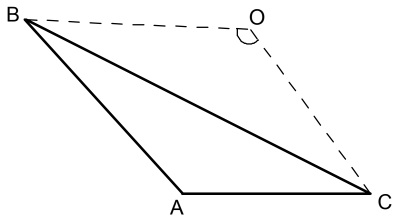
性質 2：若 O 為△ABC 的外心，

則當(1) △ABC 為銳角三角形，∠A 小於 90^0 時，∠BOC＝2∠A，如圖一。

(2) △ABC 為鈍角三角形，∠A 大於 90^0 時，∠BOC＝360^0－2∠A，如圖二。



圖一



圖二

【證明】

(1) 若△ABC 為銳角三角形，且 O 為△ABC 的外心

⇒ $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$

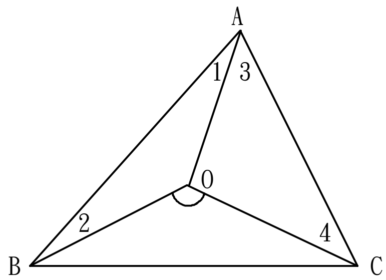
⇒ ∠1＝∠2，∠3＝∠4

∵∠BOC＝∠A＋∠2＋∠4 (箭頭定理)

＝∠1＋∠3＋∠2＋∠4

＝2 (∠1＋∠3)

＝2∠A



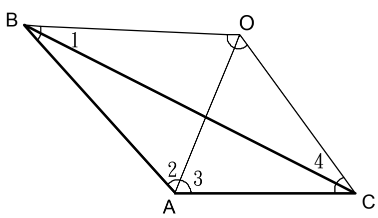
(2) 若△ABC 為鈍角三角形，且 O 為△ABC 的外心

⇒ $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$

⇒△AOB 與△AOC 均為等腰三角形

⇒ ∠1＝∠2，∠3＝∠4

∵四邊形 ABOC 內角和＝360^0



$\therefore \angle BOC + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^0$

$\Rightarrow \angle BOC = 360^0 - (\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4)$

$= 360^0 - 2(\angle 2 + \angle 3)$

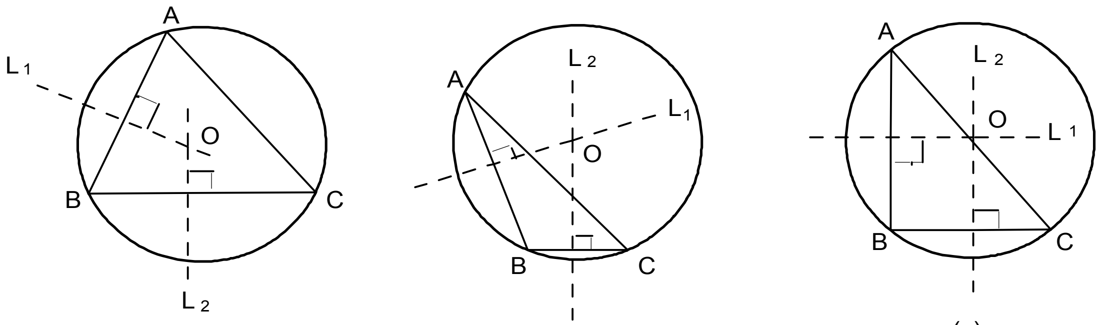
$= 360^0 - 2\angle A$

有關外心的相關應用

【範例一三角形外接圓作圖】已知一三角形，求作一圓通過此三角形的三頂點。

【已知】△ABC。

【求作】一圓 O 通過 A、B、C 三點。



(a) (b) (c)

【作法】

(1)分作 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 的中垂線 L_1、L_2。

(2)L_1、L_2 相交於一點 O。

(3)以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑畫圓，此圓即所求的圓。

【證明】

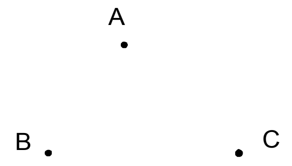
(1)如圖 L_1、L_2 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 的中垂線，

$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 。

(2)以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑的圓通過 B、C 兩點，

∴圓 O 通過 A、B、C 三點。(此圓叫做△ABC 的外接圓，而它的圓心叫做△ABC 的外心。△ABC 的外心是它的三邊的中垂線的交點。)

【範例】有 A、B、C 三村莊，現想建一所國中，且和三村莊等距離，則學校位置應在何處較適當？



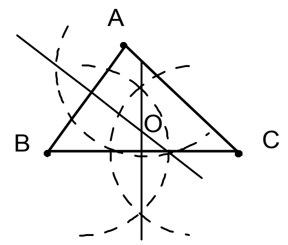
【已知】A、B、C 三村莊

【求作】距 A、B、C 等距離的學校位置

【作法】(1)連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$

(2)作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 的中垂線，兩線交於 O

(3)O 點即為學校位置



【範例】

(1) 若△ABC 為銳角三角形，O 為△ABC 的外心，∠A＝50^0，則∠BOC＝________ 。

(2) 若△ABC 為鈍角三角形，O 為△ABC 的外心，∠A＝110^0，則∠BOC＝________ 。

【解說】

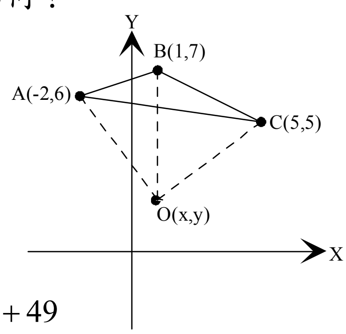
(1) ∠BOC＝2∠A＝2×50^0＝100^0

(2) ∠BOC＝360^0－2∠A＝360^0－2×110^0＝140^0

【範例】△ABC 中，A 為（－2，6），B 為（1，7），C 為（5，5），

求：(1)△ABC 的外心坐標　(2)△ABC 外接圓的面積為何？

【解說】(1)設△ABC 外心 O 的坐標為（x，y）



$\Rightarrow \overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$

$$則\begin{cases}(x+2)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y-7)^2\\(x-1)^2+(y-7)^2=(x-5)^2+(y-5)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+4x+4+y^2-12y+36=x^2-2x+1+y^2-14y+49\\x^2-2x+1+y^2-14y+49=x^2-10x+25+y^2-10y+25\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x+2y=10\\8x-4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=5 \quad \Lambda\Lambda \quad (1)\\2x-y=0 \quad \Lambda\Lambda \quad (2)\end{cases}$$

利用加減消去法，將(1)＋(2)可得：

5x＝5　⇒　x＝1　，　將 x＝1 代入(1)　，　得 y＝2

故外心坐標為（1，2）

(2)外接圓半徑＝$\sqrt{(1+2)^2+(2-6)^2}$ ＝5

故外接圓面積為 $5^2\times\pi$＝25π（平方單位）

小 試 身 手

【範例一】

三角形三邊長分別為 5、12、13，求外心到各頂點距離之和。

解答：直角Δ外心在斜邊上中點

$\therefore$距離和$=\dfrac{13}{2}\times 3=\dfrac{39}{2}$

【練習一】

設 O 為ΔABC 外心，若 $\overline{OB}=6$，求 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=$？

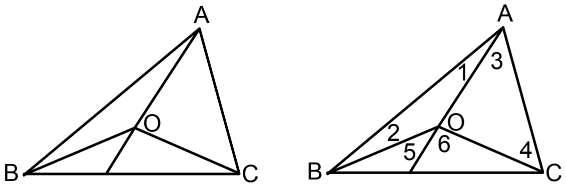
解答：$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\times 6=18$

【範例二】

1. 已知：O 為銳角ΔABC 外心

求證：∠BOC＝2∠A



證明：(1)延長 $\overline{AO}$

$\because$ O 為外心

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\therefore$∠1＝∠2，∠3＝∠4

(2)$\because$∠5＝∠1＋∠2＝2∠1

∠6＝∠3＋∠4＝2∠3

(3)$\therefore$∠BOC＝∠5＋∠6

＝2∠1＋2∠3＝2∠A

【練習二】

設 O 為ΔABC 外心，∠B＝80^0，∠C＝60^0，求∠BOC＝？

解答：∠A＝$180^0-80^0-60^0=40^0$

$\therefore$∠BOC＝2∠A

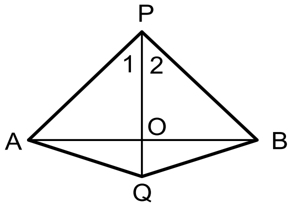
＝2×40^0

＝80^0

【範例三】

已知：$\overline{PA}=\overline{PB}$，$\overline{QA}=\overline{QB}$

求證：$\overline{PQ}$為$\overline{AB}$的中垂線



證明：(1) $\overline{PA}=\overline{PB}$，$\overline{QA}=\overline{QB}$，$\overline{PQ}=\overline{PQ}$

$\therefore$ΔPAQ≅ΔPBQ(SSS)

$\therefore$∠1＝∠2

(2) $\overline{PA}=\overline{PB}$，∠1＝∠2，$\overline{PO}=\overline{PO}$

$\therefore$ΔPOA≅ΔPOB(SAS)

$\therefore \overline{AO}=\overline{BO}$

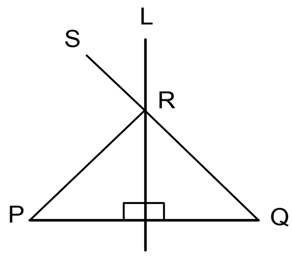
$\therefore$∠POA＝∠POB＝90^0

(3) $\therefore \overline{PQ}$為$\overline{AB}$的中垂線

【練習三】

已知：L 為$\overline{PQ}$中垂線

求證：$\overline{SQ}=\overline{SR}+\overline{RP}$



證明：(1) $\because$L 為$\overline{PQ}$中垂線

$\therefore \overline{RQ}=\overline{RP}$

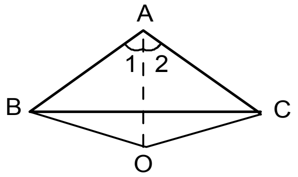
(2) $\therefore \overline{SQ}=\overline{SR}+\overline{RQ}$

$=\overline{SR}+\overline{RP}$

【範例四】

已知：O 為鈍角 ΔABC 外心

求證：$\angle BOC = 360^0 - 2\angle A$



證明：(1) ∵O 為 ΔABC 外心

$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

$\therefore \angle 1 = \angle ABO$

$\angle 2 = \angle ACO$

(2) ∵ABOC 為四邊形

$\therefore \angle BOC + \angle ABO + \angle 1 + \angle 2 + \angle ACO = 360^0$

$\therefore \angle BOC + 2\angle 1 + 2\angle 2 = 360^0$

$\therefore \angle BOC + 2\angle A = 360^0$，

(3) $\therefore \angle BOC = 360^0 - 2\angle A$

【練習四】

設 O 為 ΔABC 外心，若 $\angle BOC = 160^0$，求 $\angle BAC = ?$

解答：(1)當 $\angle BAC$ 為銳角：

$\angle BOC = 2\angle A$

$160^0 = 2\angle A$，$\angle A = 80^0$

(2)當 $\angle BAC$ 為鈍角：

$\angle BOC = 360^0 - 2\angle A$

$160^0 = 360^0 - 2\angle A$

$\therefore \angle A = 100^0$

【範例五】

$\triangle ABC$ 中，A 為（－2，6），B 為（1，7），C 為（5，5），求：(1) $\triangle ABC$ 的外心坐標 (2) $\triangle ABC$ 外接圓的面積為何？

解答：

(1)設外心坐標為（x，y）則

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y-7)^2\\(x-1)^2+(y-7)^2=(x-5)^2+(y-5)^2\end{cases}$$

解得 x＝1，y＝2

故外心坐標為（1，2）

(2)外接圓半徑為

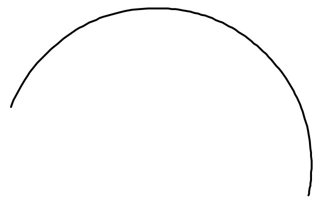
$\sqrt{(1+2)^2+(2-6)^2} = 5$

故外接圓面積為 $5^2 \times \pi = 25\pi$（平方單位）

【練習五】

某生用圓規畫圓，不小心鉛筆斷了，只畫了一個圓弧。請你找出圓心，並把圓畫好。

已知：一圓弧

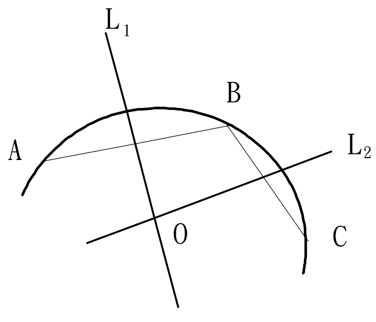


求作：作該弧圓心，並把該圓畫好

作法：(1)在弧上取 A、B、C 三點，並連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$

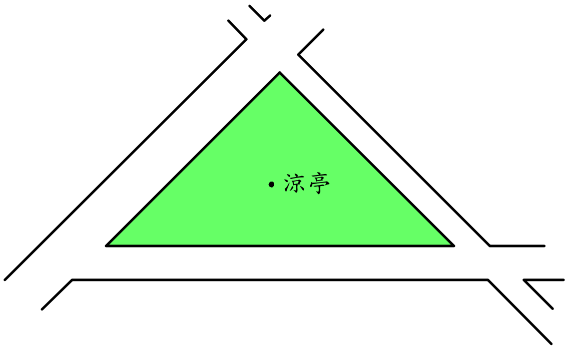
(2)作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 中垂線，兩線交於 O

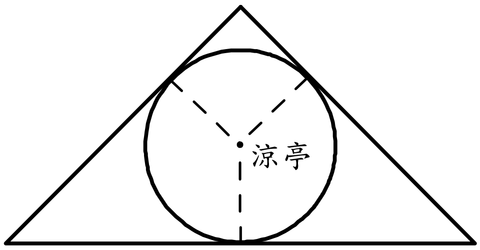
(3)以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑畫圓，即為所求



三角形的內心

在下圖左中的三角形廣場上建一座涼亭，且涼亭到三條道路的距離要相等，你知道涼亭該建在哪裡嗎？



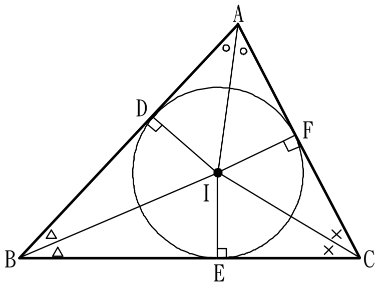


如果我們以涼亭為圓心，涼亭到道路的距離為半徑畫圓，則此圓恰與三角形的三邊相切，我們稱此圓為內切圓，而涼亭為此三角形的內心。

那麼內心要如何找到呢?內心又有哪些性質呢？這一節我們將討論有關內心的相關性質。

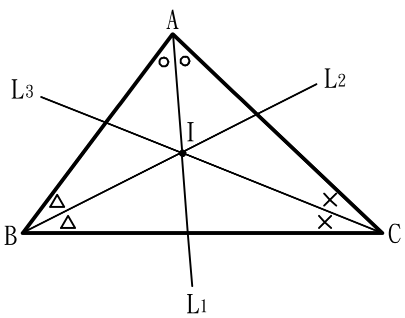
內心的定義：三角形三內角角平分線的交點，稱為三角形的內心。

如下圖中，作∠A、∠B、∠C 的角平分線，且相交於 I 點，則 I 點叫做△ABC 的內心。以 I 為圓心，由 I 分別作 $\overline{ID}\perp\overline{AB}$，$\overline{IE}\perp\overline{BC}$，$\overline{IF}\perp\overline{AC}$，過 D、E、F 三點畫圓，則圓 I 叫做△ABC 的內切圓。

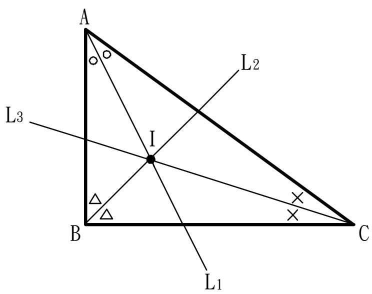


利用尺規作圖觀察三角形內心的位置：

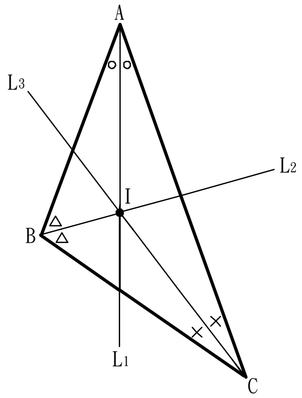
銳角三角形:內心在三角形的內部



直角三角形: 內心在三角形的內部



鈍角三角形：內心在三角形的內部



【結論】內心在三角形的內部。

內心的性質：1. 內心到三邊的距離都相等。

2. 若 O 為△ABC 的內心，則$\angle BOC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$。

3. △ABC 中，$\angle C = 90^0$，r 為其內切圓 O 的半徑，則$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + 2r$。

4. 若 O 為△ABC 的內心，則△AOB：△BOC：△COA＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$。

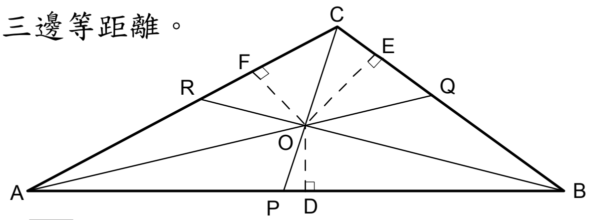
5. 設△ABC 的周長等於 s，其內切圓半徑等於 r，則$\triangle ABC = \frac{1}{2}sr$。

性質 1：給一△ABC，設 O 為其△ABC 的內心，則$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$。

（內心到三邊的距離都相等）

【已知】在ΔABC中，$\overline{AQ}$平分$\angle A$，$\overline{BR}$平分$\angle B$，$\overline{CP}$平分$\angle C$。

【求證】$\overline{AQ}$、$\overline{BR}$、$\overline{CP}$相交於一點，且這點與三邊等距離。



【證明】(1) ∵△ABC 在一平面上

∴$\overline{AQ}$與$\overline{BR}$會相交於一點 O

欲証 O 點在$\overline{CP}$上

∵O 點在$\angle A$的平分線上　∴$\overline{OD} = \overline{OF}$

∵O 點在$\angle B$的平分線上　∴$\overline{OD} = \overline{OE}$

$\Rightarrow \overline{OE} = \overline{OF}$，

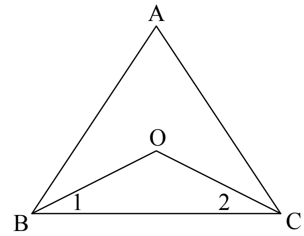
$\Rightarrow$O 點在$\angle C$的平分線 CP 上，

即△ABC 的三內角平分線$\overline{AQ}$、$\overline{BR}$、$\overline{CP}$相交於一點 O。

(2) ∵$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$，

∴O 點與△ABC 的三邊等距離。

性質 2：若 O 為△ABC 的內心，則$\angle BOC = 90^0 + \dfrac{1}{2}\angle A$。



【已知】O 為△ABC 的內心

【試證】$\angle BOC = 90^0 + \dfrac{1}{2}\angle A$。

【證明】∵O 為△ABC 的內心

$\therefore \overline{BO}$平分$\angle B$，$\overline{CO}$平分$\angle C$，

$\therefore \angle 1 = \dfrac{1}{2}\angle B$，$\angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle C$。

$\therefore \angle BOC = 180^0 - \angle 1 - \angle 2 = 180^0 - \dfrac{1}{2}\angle B - \dfrac{1}{2}\angle C$

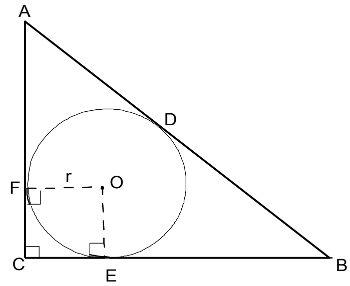
$= 180^0 - \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^0 - \dfrac{1}{2}(180^0 - \angle A) = 90^0 + \dfrac{1}{2}\angle A$

性質 3：△ABC 中，$\angle C = 90^0$，r 為其內切圓 O 的半徑，則$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + 2r$

【已知】△ABC 為直角三角形，$\angle C = 90^0$，r 為其內切圓半徑，

【試證】$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + 2r$。

【證明】(1)圓 O 分別切ΔABC三邊於 D、E 與 F，連接$\overline{OE}$與$\overline{OF}$。



(2)$\because \overline{AD}$與$\overline{AF}$過 A 點且與圓 O 相切，

$\therefore \overline{AD} = \overline{AF}$。

同理，$\overline{CE} = \overline{CF}$，$\overline{BD} = \overline{BE}$。

(3)$\because \overline{OE} \perp \overline{BC}$，$\overline{OF} \perp \overline{AC}$，$\angle C = 90^0$，$\overline{OE} = \overline{OF}$，

∴OECF 為正方形

$\therefore \overline{CE} = \overline{CF} = r$。

(4)$\because \overline{AC} = \overline{AF} + \overline{CF}$，$\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CE}$，

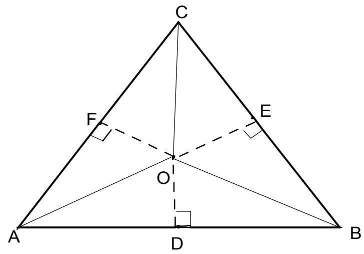
$\therefore \overline{AC} + \overline{BC} = (\overline{AF} + \overline{CF}) + (\overline{BE} + \overline{CE})$

$= (\overline{AF} + r) + (\overline{BE} + r) = (\overline{AF} + \overline{BE}) + 2r$

$= (\overline{AD} + \overline{BD}) + 2r = \overline{AB} + 2r$。

性質 4：若 O 為△ABC 的內心，則△AOB：△BOC：△COA＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$

【已知】O 為△ABC 的內心



【試證】△AOB：△BOC：△COA＝$\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$。

【證明】(1)由 O 分別作$\overline{OD} \perp \overline{AB}$，$\overline{OE} \perp \overline{BC}$，$\overline{OF} \perp \overline{AC}$，

D、E 和 F 分別為垂足。

(2)∵O 為△ABC 的內心，

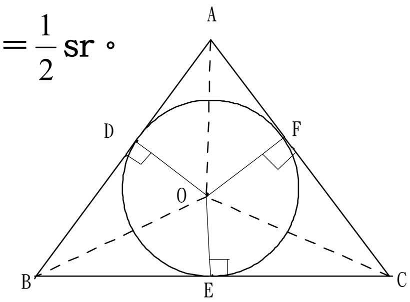
$\therefore \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$。

(3) $\triangle AOB=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OD}$，$\triangle BOC=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{OE}$，$\triangle COA=\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot\overline{OF}$。

(4)由(2)與(3)可知

$\triangle AOB：\triangle BOC：\triangle COA=\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{CA}$。

性質 5：設△ABC 的周長等於 s，其內切圓半徑等於 r，則$\triangle ABC=\frac{1}{2}sr$。



【已知】△ABC 的周長等於 s，其內切圓半徑等於 r

【求證】$\triangle ABC=\frac{1}{2}sr$

【證明】(1) △ABC 的內心為 O，連 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$

(2) $\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA=\frac{1}{2}\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\overline{BC}\times r+\frac{1}{2}\overline{AC}\times r$

$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})\times r=\frac{1}{2}sr$

有關內心的相關應用

【範例】正三角形△ABC，邊長為 a，試求出△ABC 的外接圓半徑及內切圓半徑。

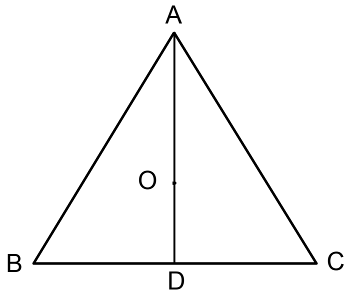
【解說】

正三角形的高 $\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

∵正三角形外心、內心、重心共點

⇒外接圓半徑$=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

⇒內切圓半徑$=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$



【範例】若 I 為△ABC 的內心，$\overline{AB}=3$ 公分，$\overline{BC}=6$ 公分，$\overline{AC}=7$ 公分，

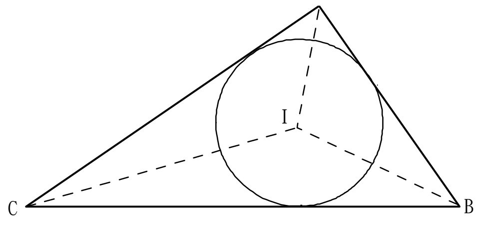
則△AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積=＿＿＿＿＿＿。

【解說】

△AIB 面積：△BIC 面積：△CIA 面積

$=\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{AC}$

$=3：6：7$

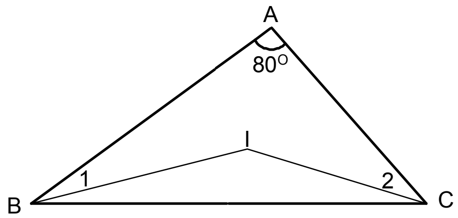


【範例】若 I 為△ABC 的內心，如右圖，則∠1＋∠2＝＿＿＿＿度，∠BIC＝＿＿＿＿＿度。

【解說】

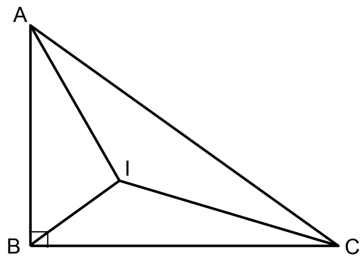
$\angle 1+\angle 2=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)=50^{0}$

$\angle BIC=180^{0}-50^{0}=130^{0}$



【範例】若 I 為直角三角形 ABC 的內心，$\overline{AB}=3$ 公分，$\overline{BC}=4$ 公分，

則其內切圓半徑＝＿＿＿＿。



【解說】

∵△ABC 為直角三角形

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\because \overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}+2r$

$3+4=5+2r$

$\therefore r=1$

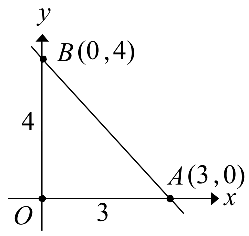
【範例】坐標平面上直線 $4x+3y=12$ 交 x 軸於 A 點，交 y 軸於 B 點。若 O 為原點，I 為△AOB 之內心，則△AIB 的面積＝？

【解析】

$4x+3y=12 \Rightarrow$

x	0	3
y	4	0

所以圖形如右圖(一)：



圖(一)

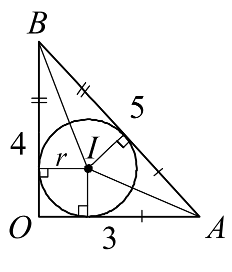
如右圖(二)，設圓 I 半徑 r

∵△ABC 為直角三角形

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\because \overline{AO}+\overline{BO}=\overline{AB}+2r \Rightarrow 3+4=5+2r \Rightarrow r=1$

則$\triangle AIB=\dfrac{1}{2}\times 5\times 1=\dfrac{5}{2}$



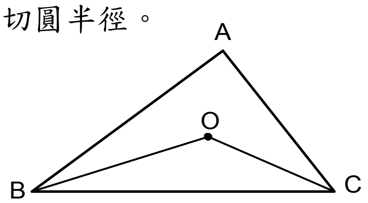
圖(二)

小 試 身 手

【範例一】

(1)$\angle A=90^0$，$\overline{AB}=\overline{AC}$，O 為 ΔABC 的內心，求 $\angle BOC$ 的度數

(2)承上題，若 $\overline{AB}=2$ 公分，求 ΔABC 的外接圓半徑及內切圓半徑。



解答：(1) $\angle BOC=90^0+\dfrac{1}{2}\angle A$

$=90^0+\dfrac{1}{2}\times 90^0=135^0$

(2) $\because \angle A=90^0$，$\overline{AB}=\overline{AC}=2$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

外接圓半徑

$=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$（公分）

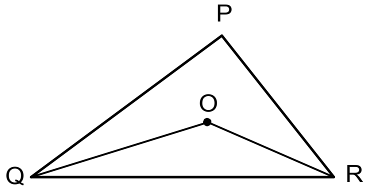
內切圓半徑

$=\dfrac{1}{2}(2+2-2\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$（公分）

【練習一】

(1)O 為 ΔPQR 的內心，$\angle O=135^0$，求 $\angle P$ 的度數。

(2)一直角三角形兩股分別為 7 與 24，求此直角三角形之外接圓的直徑及內切圓的直徑。



解答：(1) $\angle O=90^0+\dfrac{1}{2}\angle P$

$\angle P=2(\angle O-90^0)$

$=2(135^0-90^0)=90^0$

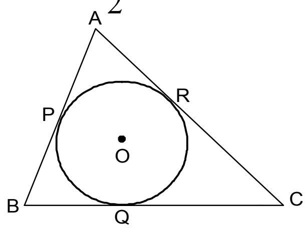
(2)外接圓直徑 $=\sqrt{7^2+24^2}=25$

內切圓直徑 $=7+24-25=6$

【範例二】

(1)圓 O 為 ΔABC 的內切圓，P、Q、R 分別為切點，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，分別求 $\overline{AP}$ 與 $\overline{BQ}$、$\overline{CR}$ 的長。

(2)若圓 O 的半徑是 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，求 ΔABC 的面積



解答：(1) $\because s=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=4+5+6=15$

$\therefore \overline{AP}=\dfrac{1}{2}s-\overline{BC}=7.5-5=2.5$

$\overline{BQ}=\dfrac{1}{2}s-\overline{AC}=7.5-6=1.5$

【練習二】

(1) ΔABC 的周長是 48，面積是 96，其內切圓的半徑是多少？

(2) ΔABC 的面積是 84，其內切圓半徑是 3，求 ΔABC 的周長。

解答：(1) $\because \Delta ABC=\dfrac{1}{2}sr$

$\therefore 96=\dfrac{1}{2}\times 48\times r \Rightarrow r=4$

(2) $\because \Delta ABC=\dfrac{1}{2}sr$

$\therefore 84=\dfrac{1}{2}\times s\times 3\Rightarrow s=56$

$\overline{CR}=\frac{1}{2}s-\overline{AB}=7.5-4=3.5$

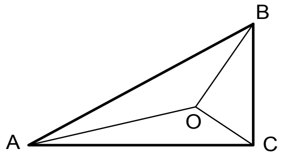
（2）ΔABC 面積$=\frac{1}{2}\times s\times r$

$=\frac{1}{2}\times 15\times \frac{\sqrt{7}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{7}}{4}$（平方單位）

【範例三】

ΔABC 中，$\angle A=30^0$，$\angle B=60^0$，$\angle C=90^0$，O 為內心。



試證：ΔBOC：ΔAOC：$\Delta AOB=1$：$\sqrt{3}$：2

證明：$\because \angle A=30^0$，$\angle B=60^0$，$\angle C=90^0$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{BC}$，$\overline{AC}=\sqrt{3}\,\overline{BC}$

$\because$O 為 ΔABC 之內心

$\therefore \Delta BOC$：ΔAOC：ΔAOB

$=\overline{BC}$：$\overline{AC}$：$\overline{AB}$

$=\overline{BC}$：$\sqrt{3}\,\overline{BC}$：$2\overline{BC}$

$=1$：$\sqrt{3}$：2

【練習三】

ΔABC 中，$\angle A$ 為直角，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=24$，O 為內心，則 ΔAOB：ΔBOC：$\Delta COA=$？

解：$\overline{BC}=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$

$\because$O 為 ΔABC 的內心

$\therefore \Delta AOB$：ΔBOC：ΔCOA

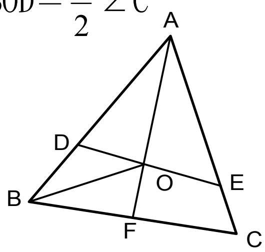
$=\overline{AB}$：$\overline{BC}$：$\overline{CA}$

$=7$：25：24

【範例四】

O 為 ΔABC 的內心，$\overline{DE}\perp\overline{AF}$ 於 O。

試證：$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle C$



證明：$\because$O 為 ΔABC 的內心

$\therefore \angle BOA=90^0+\frac{1}{2}\angle C$……①

$\because \overline{DE}\perp\overline{AF}$

$\therefore \angle DOA=90^0$……………②

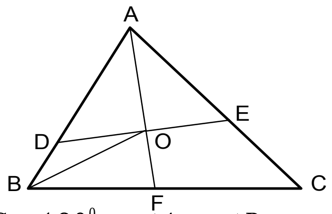
由①－②得 $\angle BOA-\angle DOA$

$=90^0+\frac{1}{2}\angle C-90^0$

即 $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle C$

【練習四】

O 為 ΔABC 的內心，$\overline{DE}\perp\overline{AF}$ 於 O，若 $\angle A=70^0$，$\angle B=60^0$，則 $\angle BOD=$？



解答：$\angle C=180^0-\angle A-\angle B$

$=180^0-70^0-60^0=50^0$

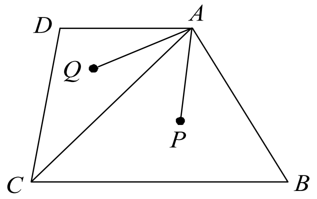
$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle C$

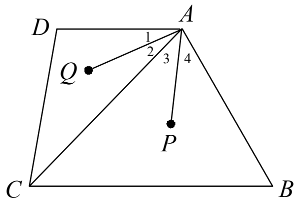
$=\frac{1}{2}\times 50^0$

$=25^0$

【範例五】

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^{\circ}$、$\angle DCB=80^{\circ}$、$\angle D=100^{\circ}$。若 P、Q 兩點分別為△ ABC 及△ ACD 的內心，則 $\angle PAQ=$？





解答：

$\angle DAB=360^{\circ}-60^{\circ}-80^{\circ}-100^{\circ}=120^{\circ}$

$\because P$ 為$\triangle ABC$ 的內心

$\therefore \angle 3=\frac{1}{2}\angle BAC$

$\because Q$ 為$\triangle ACD$ 的內心

$\therefore \angle 2=\frac{1}{2}\angle DAC$

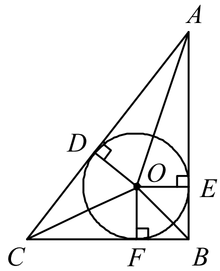
$\therefore \angle PAQ=\angle 2+\angle 3$

$=\frac{1}{2}(\angle DAC+\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\times 120^{\circ}=60^{\circ}$

【練習五】

如右圖，△ ABC 是直角三角形，$\angle B=90^{\circ}$，$\overline{BC}=3$、$\overline{AC}=5$，圓 O 是△ ABC 的內切圓，D、E、F 是切點，求 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=$？



解答：

$\because$D、E、F 為切點

$\therefore \overline{OD}\perp\overline{AC}$，$\overline{OE}\perp\overline{AB}$

$\overline{OF}\perp\overline{BC}$

設內切圓 O 的半徑 r

$\because \overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}+2r$

$\Rightarrow 4+3=5+2r \quad \Rightarrow r=1$

$\therefore \overline{BE}=\overline{BF}=r=1$

又 $\overline{AD}=\overline{AE}=3$，$\overline{CD}=\overline{CF}=2$

$\Rightarrow \overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\overline{OB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{OC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

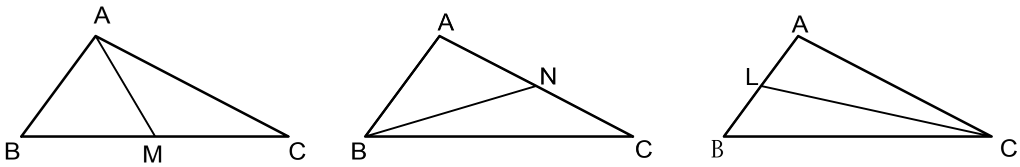
$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$

三角形的重心

想要像下圖一樣，把一個三角形支撐起來，必須找到此三角形的平衡點也就是重心，那該如何找到重心呢？三角形的重心又有哪些性質呢？這一節我們將討論此問題。

三角形的中線與等面積性質

1. 中線的定義：三角形的一頂點和對邊中點的線段為此三角形的中線，
   一個三角形有三條中線。



2. 中線與面積關係：三角形的每一條中線把這個三角形分為兩個等積的三角形。

【已知】在△ABC 中，$\overline{AM}$ 為中線。

【求證】△ABM 和△ACM 的面積相等。

【證明】(1)過頂點 A 作 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂線相交於 D，則 $\overline{AD}$ 為△ABM 的高，也是△ACM 的高。

(2) △ABM 的面積 $=\frac{1}{2}\overline{BM}\cdot\overline{AD}$，

△ACM 的面積 $=\frac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{AD}$。

(3) ∵M 為 $\overline{BC}$ 的中點，

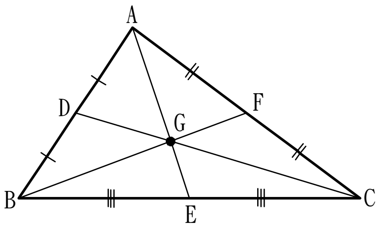
$\therefore \overline{BM}=\overline{CM}$。

(4) $\because \overline{BM}=\overline{CM}$，

$\therefore \frac{1}{2}\overline{BM}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{CM}\times\overline{AD}$，

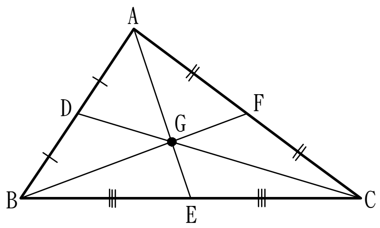
$\therefore$△ABM 的面積＝△ACM 的面積。

三角形重心的定義：三角形三中線必交於一點，此點稱為三角形的重心。如下圖，$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$ 為三中線，則 G 稱為△ABC 的重心。

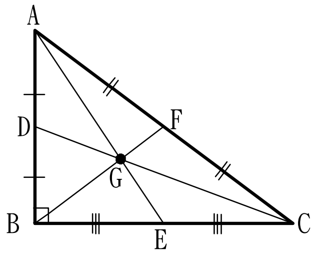


利用尺規作圖觀察三角形重心的位置：

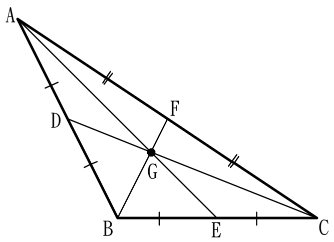
銳角三角形:重心在三角形的內部



直角三角形:重心在三角形的內部



鈍角三角形:重心在三角形的內部



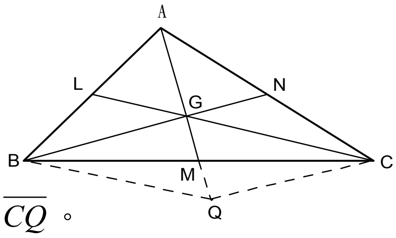
【結論】重心在三角形的內部。

重心的性質：1. 三角形的重心到一頂點的距離等於過這頂點的中線的$\frac{2}{3}$。

2. 三角形重心與三頂點連線會三等分此三角形。

3. 三角形的三中線會六等分此三角形。

性質 1：三角形的重心到一頂點的距離等於過這頂點的中線的$\frac{2}{3}$。



【已知】ΔABC 的三中線 $\overline{AM}$ 、 $\overline{BN}$ 、 $\overline{CL}$ 相交於 G 點。

【求證】$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AM}$，$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BN}$，$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CL}$。

【證明】(1) 在 $\overleftrightarrow{AM}$ 上取一點 Q，使得 $\overline{GQ}=\overline{AG}$，連接 $\overline{BQ}$、$\overline{CQ}$。

(2) 在△ABQ 中

$\because \overline{AL}=\overline{LB}$，$\overline{AG}=\overline{GQ}$

$\therefore \overline{LC}/\!/\overline{BQ} \quad \Rightarrow \quad \overline{GC}/\!/\overline{BQ}$

同理可得 $\overline{BG}/\!/\overline{QC}$　則知 BQCG 為平行四邊形。

(3) ∵BQCG 為平行四邊形，

$\therefore \overline{GM}=\overline{MQ}$。

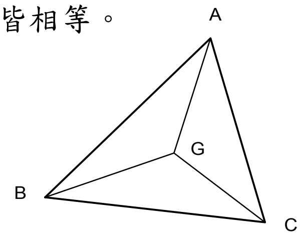
(4) $\because \overline{AG}=\overline{GQ}=\overline{GM}+\overline{MQ}=2\overline{GM}$，

$\overline{AM}=\overline{AG}+\overline{GM}=2\overline{GM}+\overline{GM}=3\overline{GM}$，

$\therefore \overline{AG}=2\overline{GM}=2\left(\frac{1}{3}\overline{AM}\right)=\frac{2}{3}\overline{AM}$。

(5) 同理，$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BN}$，$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CL}$。

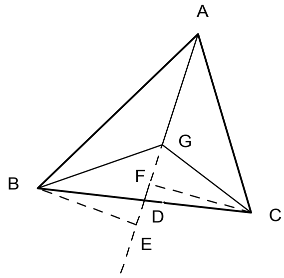
性質 2：三角形重心與三頂點連線會三等分此三角形



【已知】如圖，ΔABC 內有一點 G，若△ABG、△BCG、△CAG 的面積皆相等。

【試證】G 為ΔABC 重心

【證明】(1) 延長 $\overline{AG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，並過 B、C 作直線 AD 的垂線，分別交於 E、F 兩點



(2) ∵△ABG＝△ACG　$\therefore \overline{BE}=\overline{CF}$

(3) ∴在△BDE 與△CDF 中，$\overline{BE}=\overline{CF}$，∠BDE＝∠CDF

又∠BED＝∠CFD＝90^0

(4) ∴△BDE≅△CDF(AAS)

$\therefore \overline{BD}=\overline{CD}$

$\therefore \overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的中線

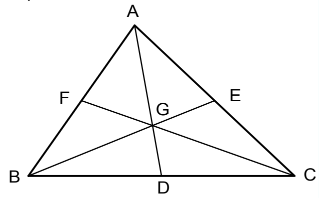
(5) 同理，延長 $\overline{BG}$、$\overline{CG}$ 均過 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點

(6) ∴G 為△ABC 重心

性質 3：三角形的三中線會六等分此三角形

【已知】如圖，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 分別為△ABC 之三中線，G 為△ABC 重心

【試證】△AGF、△BGF、△BGD、△CGD、△CGE、△AGE 六個面積皆相等。

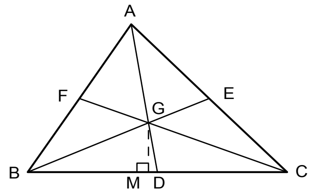


【證明】(1)∵ $\overline{AD}$ 為△ABC 之中線

∴ $\overline{BD}=\overline{DC}$

(2)過 G 點作 $\overline{GM}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 M 點

△BGD$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{GM}=\frac{1}{2}\overline{DC}\times\overline{GM}=$△GDC



同理可證△AGF＝△BGF；△CGE＝△AGE

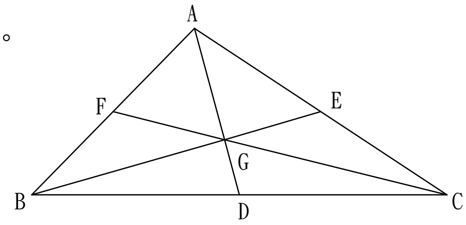
(3)∵G 為重心

∴△AGB＝△BGC＝△AGC

故得知△AGF＝△BGF＝△BGD＝△CGD＝△CGE＝△AGE

有關重心的相關應用

【範例】如右圖，D、E、F 分別為△ABC 三邊上的中點。



(1) 若 $\overline{AD}=9$，則 $\overline{AG}=$________。

(2) 若 $\overline{GE}=\frac{4}{3}$，則 $\overline{BE}=$________。

(3) 若 $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=36$，

則 $\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG}=$________。

(4) 若△ABC＝42 平方公分，

則△GAF＝________平方公分，△GBC＝________平方公分。

【解說】

(1) $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}=6$

(2) $\because\overline{GE}=\frac{1}{3}\overline{BE}$ $\therefore\overline{BE}=3\overline{GE}=3\times\frac{4}{3}=4$

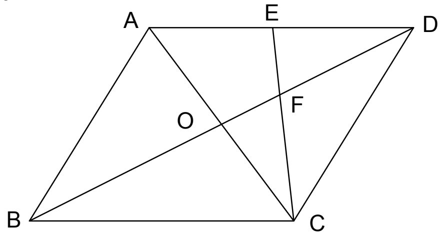
(3) $\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG}=\frac{2}{3}(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})=24$

(4) △GAF$=\frac{1}{6}$△ABC＝7；

△GBC$=\frac{1}{3}$△ABC＝14

【範例】如圖，ABCD 為平行四邊形，兩對角線相交於 O，

E 為 $\overline{AD}$ 中點，$\overline{CE}$ 交 $\overline{BD}$ 於 F，



則：(1) $\overline{OF}$：$\overline{BD}$ 為多少？

(2) 四邊形 ABFE 面積：四邊形 ABCD 面積為多少？

【解說】

(1) 在△ACD 中，F 為重心 $\Rightarrow \overline{OF}:\overline{OD}=1:2$ 即 $\overline{OF}=\frac{1}{3}\overline{OD}$

又 $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ $\quad\therefore \overline{OF}=\frac{1}{3}\overline{OD}=\frac{1}{6}\overline{BD}$

$\therefore \overline{OF}:\overline{BD}=1:6$

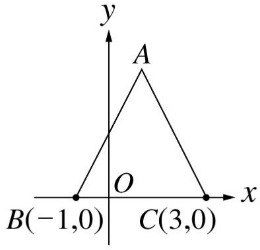
(2) 四邊形 AOFE 面積 $=\frac{1}{3}$△ACD 面積 $=\frac{1}{6}$ 四邊形 ABCD 面積

△AOB 面積 $=\frac{1}{2}$△ABC 面積 $=\frac{1}{4}$ 四邊形 ABCD 面積

∴四邊形 ABFE 面積＝△AOB＋四邊形 AOFE＝$\frac{5}{12}$ 四邊形 ABCD 面積

∴四邊形 ABFE 面積：四邊形 ABCD 面積＝5：12

【範例】如圖，△ABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$，B 點坐標是(−1, 0)、C 點坐標是(3, 0)，若△ABC 的面積為 12，試求：



(1) A 點的坐標是________。

(2) △ABC 重心的坐標是________。

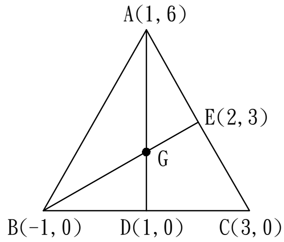
【解析】

(1) ∵D 為 $\overline{BC}$ 的中點 ∴D 點坐標是(1, 0)

又∵△ABC＝12＝$\frac{1}{2}\times 4\times \overline{AD}$ $\quad\therefore \overline{AD}=6$

⇒A 點坐標是(1, 6)

(2) $\overline{AC}$ 的中點坐標 E 為(2, 3)



$\overline{AD}$ 的方程式：$x=1$

$\overline{BE}$ 的方程式：$y=x+1$

$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 的交點即為重心 G

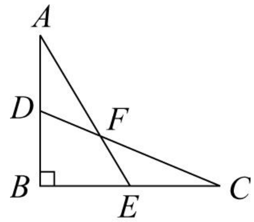
∴G 的坐標是(1, 2)

【範例】如圖，$\angle B=90^{\circ}$，D、E 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 的中點，$\overline{AE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 F 點，

若 $\overline{AB}=10$、$\overline{BC}=12$，請問：

(1) $\overline{DF}$ 的長為________。

(2)四邊形 BEFD 的面積為________平方單位。



【解析】(1) 連接 $\overline{AC}$

∵D、E 分別為 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 的中點

∴G 為正ΔABC 重心

$$\Rightarrow \overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{CD}=\frac{1}{3}\sqrt{5^2+12^2}=\frac{13}{3}$$

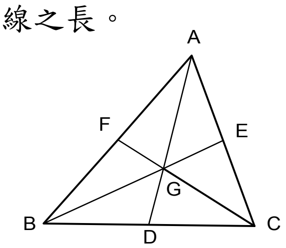
(2) ∵G 為正ΔABC 重心　　∴$\triangle BEF=\frac{1}{6}\triangle ABC$

四邊形 $BEFD=2\triangle BEF=2\left(\frac{1}{6}\triangle ABC\right)=\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times10\times12\right)=20$

小 試 身 手

【範例一】

G 為△ABC 重心，若 $\overline{AG}=6$，$\overline{BG}=10$，$\overline{CG}=8$，求各中線之長。



解答：∵G 為△ABC 重心

$\therefore \overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$

$\therefore 6=\frac{2}{3}\overline{AD}$，$\overline{AD}=9$

同理，$\overline{BE}=10\times\frac{3}{2}=15$

$\overline{CF}=8\times\frac{3}{2}=12$

【練習一】

設△ABC 三中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 相交於 G，$\overline{AD}=12$ 公分，$\overline{BE}=15$ 公分，$\overline{CF}=21$ 公分，求 $\overline{GD}$ 、$\overline{GE}$ 、$\overline{GF}$ 之長。

解答：G 為三中線交點　∴G 為重心

$\therefore \overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times12=4$（公分）

$\overline{GE}=\frac{1}{3}\overline{BE}=\frac{1}{3}\times15=5$（公分）

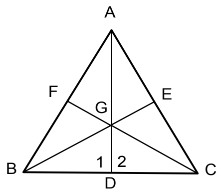
$\overline{GF}=\frac{1}{3}\overline{CF}=\frac{1}{3}\times21=7$（公分）

【範例二】

已知：G 為正△ABC 重心

求證：(1) G 亦為正ΔABC 外心

(2)若 $\overline{AG}=6$，求 $\overline{AB}$ 長及△ABC 面積



證明：(1)①∵G 為正ΔABC 重心

∴ $\overline{AD}$ 為中線

在△ADB 與ΔADC 中，

$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

∴△ADB≅△ADC（SSS）

∴∠1＝∠2＝90^0，

∴ $\overline{AD}$ 也是 $\overline{BC}$ 的中垂線

②同理可證 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 亦為中垂線

③∴G 亦為ΔABC 外心

(2) $\overline{AG}=\dfrac{2}{3}\overline{AD}$，$6=\dfrac{2}{3}\overline{AD}$

∴ $\overline{AD}=9$，$\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$

$9=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$ ∴ $\overline{AB}=6\sqrt{3}$

∴△ABC 面積＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}$

【練習二】

設 G 為正△ABC 重心，$\overline{AB}=10$，求 $\overline{AG}$ 之長。

解答：∵△ABC 為正三角形

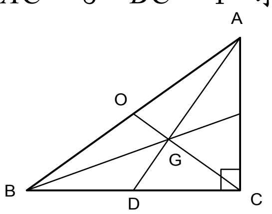
∴中線即為高

∴高＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times10=5\sqrt{3}$

$\overline{AG}=\dfrac{2}{3}$中線$=\dfrac{2}{3}\times5\sqrt{3}=\dfrac{10}{3}\sqrt{3}$

【範例三】

直角△ABC 中，∠C＝90^0，O 為外心，G 為重心。若 $\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$，求 $\overline{OC}$ 與 $\overline{OG}$ 之長。



解答：$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$

∴ $\overline{AB}=5$，$\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{5}{2}$

$\overline{OG}=\dfrac{1}{3}\overline{OC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{6}$

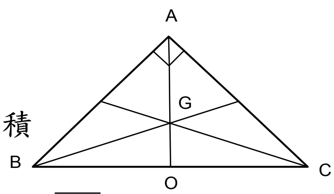
【練習三】

設 G 為等腰直角△ABC 的重心，$\overline{AG}=2$

求：(1) $\overline{BC}$ 之長

(2) $\overline{OG}$ 之長

(3) △ABC 面積



解答： (1) $\overline{AG}=2$ ∴ $\overline{AO}=3$

$\overline{BC}=2\overline{AO}=2\times3=6$

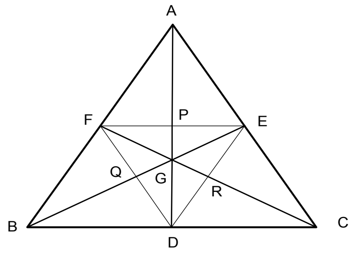
(2) $\overline{OG}=\dfrac{1}{3}\overline{AO}=1$

(3) △ABC＝$\dfrac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{AO}$

＝9（平方單位）

【範例四】

已知：D、E、F 為ΔABC 三邊中點，G 為ΔABC 重心



求證：G 為△DEF 重心

證明：(1) ∵D、E、F 分別為三邊中點

$\therefore \overline{DF} // \overline{AC}$ ，$\overline{DE} // \overline{AB}$

∴AFDE 為平行四邊形

$\therefore \overline{PF} = \overline{PE}$

即 $\overline{DP}$ 是 $\overline{EF}$ 的中線

(2)同理可證，$\overline{EQ}$ 為 $\overline{DF}$ 的中線，

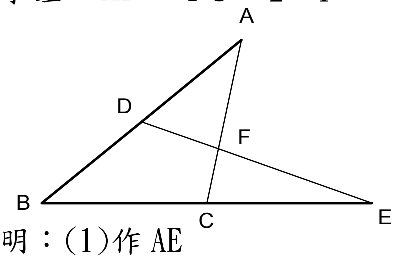
$\overline{FR}$ 為 $\overline{DE}$ 的中線

(3) ∴G 為△DEF 重心

【練習四】

已知：D 為 $\overline{AB}$ 中點，C 為 $\overline{BE}$ 中點

求證：$\overline{AF}$ ：$\overline{FC}$ ＝2：1



證明：(1)作 AE

(2) $\because \overline{AD} = \overline{BD}$

$\overline{BC} = \overline{CE}$

∴F 為△ABE 重心

(3) $\therefore \overline{AF} = 2\overline{FC}$

$\therefore \overline{AF}$ ：$\overline{FC}$ ＝2：1