二次函數與其圖形

二次函數的意義與作圖

1. **函數複習**：

（1）函數：

如果對於每一個x值，都恰好只有一個y的對應值。那麼這種對應關係就表示y是x的函數。我們常用下面的符號

$$y=f(x) \text{ 或 } y=g(x)$$

等來表示。例如：$f(x)=5x$，$g(x)=\frac{10}{x}$，$A(x)=x^2$，$B(x)=100+8x$，$S(x)=\frac{200}{3x}$，$h(x)=2x^2+3x-1$ 等都是x的函數。

（2）線性函數：

1. 一般來說，x的一次函數以下面的形式：

$$f(x)=ax+b$$

來表示，其中a和b都是常數，且$a\neq 0$。

2. 當$a=0$時，$f(x)=0\cdot x+b$，即$f(x)=b$。

我們會把這樣的函數叫做常數函數。

也就是，常數函數以下面的形式：

$$f(x)=b$$

來表示，其中b是已知常數。

【範例】：下面的函數中，哪些是一次函數？哪些是常數函數？

（A）$f(x)=5$　（B）$g(x)=3x+1$　（C）$A(x)=-3+x$　（D）$B(x)=-1$

解　：（A）$f(x)=5$ 為常數函數

（B）$g(x)=3x+1$ 為一次函數

（C）$A(x)=-3+x$ 為一次函數

（D）$B(x)=-1$ 為常數函數

（3）一次函數的作圖：

我們可以把一次函數 $y=f(x)=ax+b$ 看成是一個二元一次方程式，我們知道二元一次方程式的圖形是一條直線，所以一次函數的圖形也是一條直線。

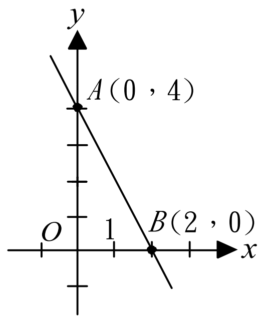
【範例】：畫出一次函數 $f(x)=-2x+4$ 的圖形。

解　：

我們取 $y=f(x)=-2x+4$ 的兩組對應值如右：

x	0	2
y	4	0

在坐標平面上，描出兩點 $A(0，4)$，$B(2，0)$，則過 A 、 B 兩點的直線就是這函數的圖形，如右所示：



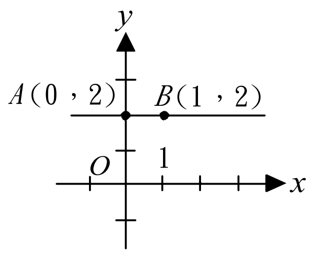
【範例】：畫出一次函數 $f(x)=2$ 的圖形。

解　：

我們取 $y=f(x)=2$ 的兩組對應值如右：

x	0	1
y	2	2

在坐標平面上，描出兩點 $A(0，2)$，$B(1，2)$，則過 A 、 B 兩點的直線就是這函數的圖形，如下所示：



2. **<u>二次函數的意義</u>**：

$y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的形式為所謂的二次函數，其中 a 、 b 、 c 為常數，但 $a\neq 0$，在此我們想知道其圖形的長相為何？

例如：$y=x^2$，$y=-3x^2+6$，$y=2x^2-1$，$y=x^2+2x+1$ 皆是二次函數。

【範例】：正方形面積 y 與邊長 x 的關係為 $y=x^2$。

正方形每個邊長 x 皆會對應一個面積 y。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	…

【**範例**】：有一個二次函數為$y=2x^2$，當x值確定時，會有一個y值跟著確定，如下表所示：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	…
y	…	32	18	8	2	0	2	8	18	32	…

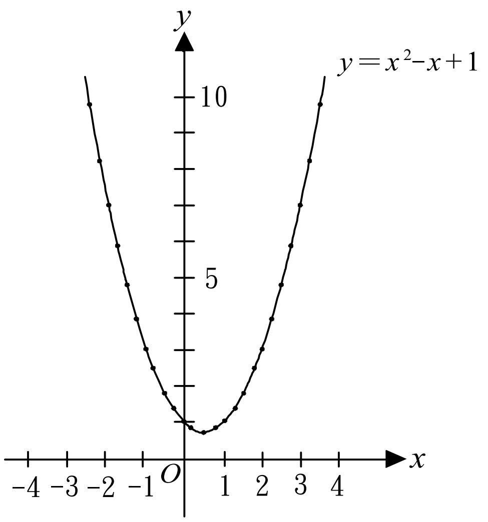
【**範例**】：有一個二次函數為$y=x^2-x+1$，當x值確定時，會有一個y值跟著確定，如下表所示：

x	…	−2.5	−2.25	−2	−1.75	−1.5	−1.25	−1	−0.75	−0.5	−0.25
y	…	9.75	8.3125	7	5.8125	4.75	3.8125	3	2.3125	1.75	1.3125

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
y	1	0.8125	0.75	0.8125	1	1.3125	1.75	2.3125	3	3.8125

x	2.5	2.75	3	3.25	3.5	…
y	4.75	5.8125	7	8.3125	9.75	…

由以上的表格，我們畫出其二次函數之圖形：



由以上結果可發現二次函數的解有無限多組解，我們無法一一找出所有解並將其畫在圖形上，於是我們接下來要開始討論二次函數的作圖方法與圖形討論，來解決作圖上所產生的困難。

3. 二次函數的圖形討論與作圖：

我們已經知道一次函數的圖形是直線，那麼二次函數的圖形是什麼形狀呢？

我們主要目的就是要討論二次函數的圖形。

【問題】：是否有一般的規則能夠很快的判定二次函數的大致圖形嗎？

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 可以利用配方法把它化為

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-a\times\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

令 $h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 並且代入上面的等式中，

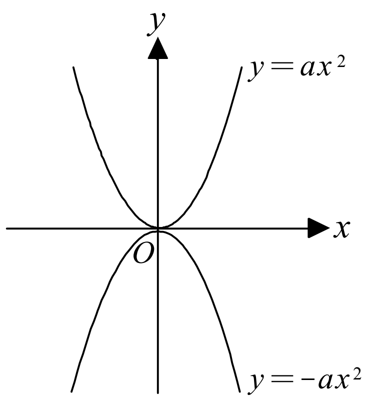
得 $f(x)=a(x-h)^2+k$。

因此，二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-h)^2+k$。

(1) 若 $h=0$，$k=0$，則 $f(x)=ax^2$。

當 $a>0$ 時，其圖形為開口向上的拋物線，頂點在(0，0)的位置。

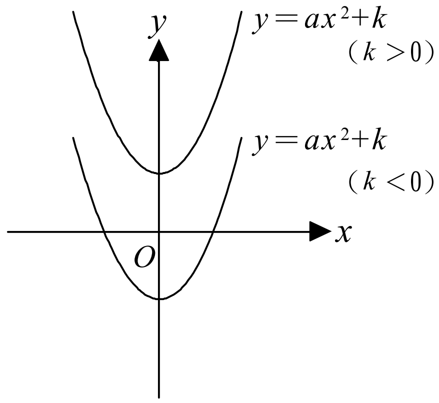
當 $a<0$ 時，其圖形為開口向下的拋物線，頂點在(0，0)的位置。

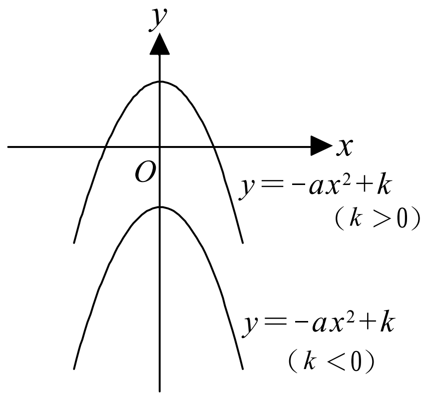


(2) 若 $h=0$，$k\neq0$，則 $f(x)=ax^2+k$。

當 $k>0$ 時，其圖形為 $y=ax^2$ 的圖形(沿 y 軸) 向上移動 k 個單位長，其頂點在(0，k)且以直線 $x=0$ 為對稱軸。

當 $k<0$ 時，其圖形為 $y=ax^2$ 的圖形(沿 y 軸) 向下移動 k 個單位長，其頂點在(0，k)且以直線 $x=0$ 為對稱軸。

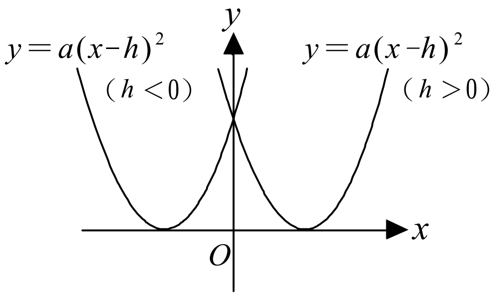


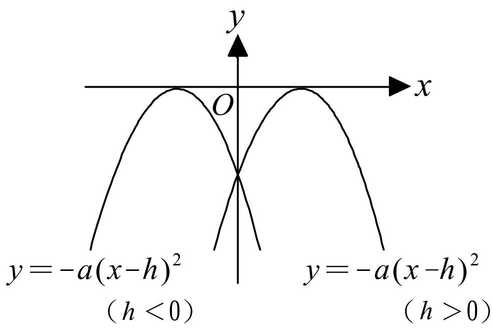


(3) 若 $h \neq 0$，$k = 0$，則 $f(x) = a(x-h)^2$。

當 $h > 0$ 時，其圖形為 $y = ax^2$ 的圖形(沿 x 軸) 向右移動 h 個單位長，其頂點在(h，0)且以直線 $x = h$ 為對稱軸。

當 $h < 0$ 時，其圖形為 $y = ax^2$ 的圖形(沿 x 軸) 向左移動 h 個單位長，其頂點在(h，0)且以直線 $x = h$ 為對稱軸。



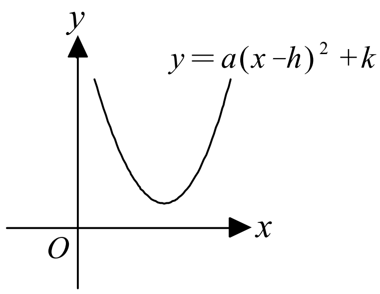


(4) 若 $h \neq 0$，$k \neq 0$，則 $f(x) = a(x-h)^2 + k$。

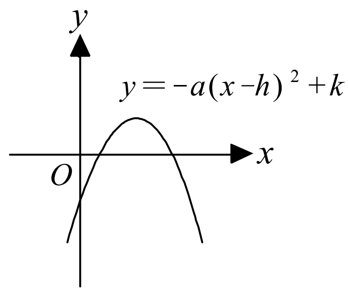
當 $a > 0$ 時，其圖形為開口向上的拋物線，頂點在(h, k)，其對稱軸為直線 $x = h$ 。

當 $a < 0$ 時，其圖形為開口向下的拋物線，頂點在(h, k)，其對稱軸為直線 $x = h$ 。

開口向上



開口向下

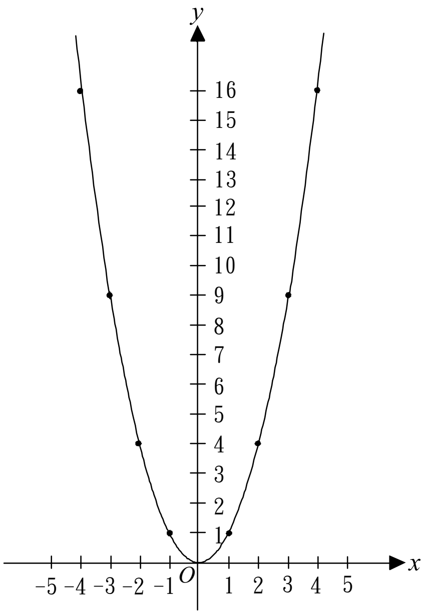


【範例】：請描繪出 $f(x)=x^2$ 的圖形。

解　：令 $y=f(x)=x^2$，首先將 x 和 y 的對應情形列表如下：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	16	9	4	1	0	1	4	9	16	…

在座標平面上描出以上幾個點的位置，再以圓滑曲線連接各點而得下列圖形，即為 $y=x^2$ 的圖形：

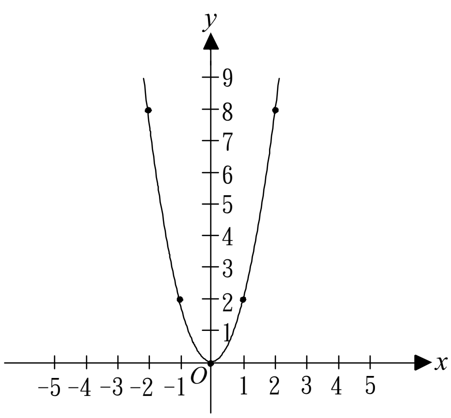


【範例】：請描繪出 $f(x)=2x^2$ 的圖形。

解　：令 $y=f(x)=2x^2$，首先找出 5 個 x 和 y 的數對如下表所示：

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

在座標平面上描出以上幾個點的位置，再以圓滑曲線連接各點而得右邊圖形，即為 $y=2x^2$ 的圖形：



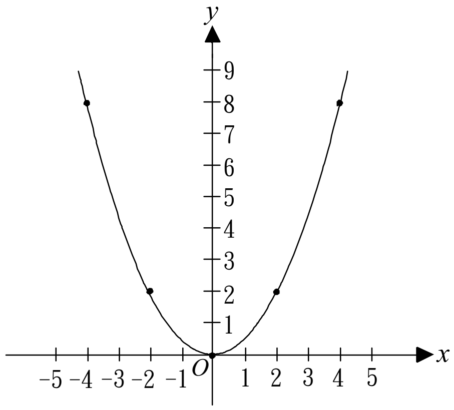
【範例】：請描繪出 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形。

解　：

令 $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$，首先找出 5 個 x 和 y 的數對如下表所示：

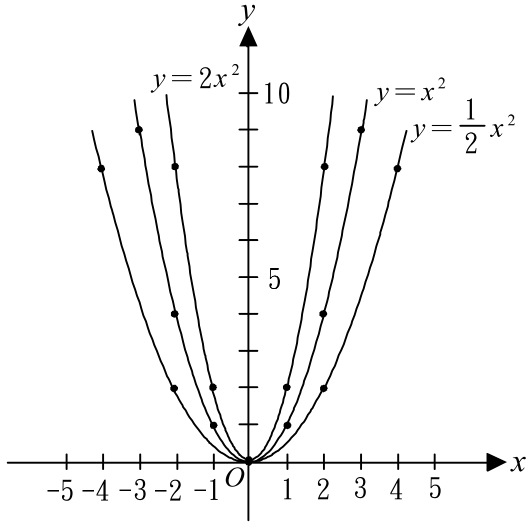
x	−4	−2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

在座標平面上描出以上幾個點的位置，再以圓滑曲線連接各點而得右邊圖形，即為 $y=2x^2$ 的圖形：



4. <u>二次函數圖形的比較</u>：

(1) 我們在同一坐標平面上，描繪出 $y=x^2$、$y=2x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形，來比較 $y=x^2$、$y=2x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形之間的關係，如下圖所示：



（$\because$ $2>1>\frac{1}{2}$，

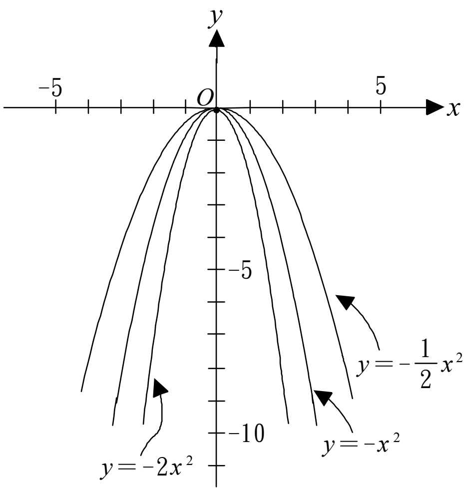
$\therefore$ 開口大小：

$y=2x^2<y=x^2<y=\frac{1}{2}x^2$。）

由此可知：

1. 這些函數的x^2項係數都是正數。
2. 原點為頂點，且y軸($x=0$)為對稱軸。
3. 開口向上的對稱圖形（頂點為最低點)。
4. 當x^2的係數的絕對值愈大，圖形的開口愈小。

(2) 這次我們在同一坐標平面上，描繪出$y=-x^2$、$y=-2x^2$和$y=-\frac{1}{2}x^2$的圖形，來比較$y=-x^2$、$y=-2x^2$和$y=-\frac{1}{2}x^2$的圖形之間的關係，如下圖所示：



（$\because$ $-2<-1<-\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 開口大小：

$y=-2x^2<y=-x^2<y=-\frac{1}{2}x^2$。）

由此可知：

1. 這些函數的x^2項係數都是負數。
2. 原點為頂點，且y軸($x=0$)為對稱軸。
3. 開口向下的對稱圖形（頂點為最高點)。
4. 當x^2的係數的絕對值愈大，圖形的開口愈小。

※注意：x^2項係數的正負號決定了開口的方向，正的開口向上，而負的則是開口向下另一方面，x^2項係數的絕對值大小會影響開口的大小，若x^2項係數的絕對值越大，則開口越小。

例如：(A)$y=-\frac{1}{2}x^2$ (B)$y=-2x^2$ (C)$y=-x^2$ (D)$y=\frac{1}{2}x^2$

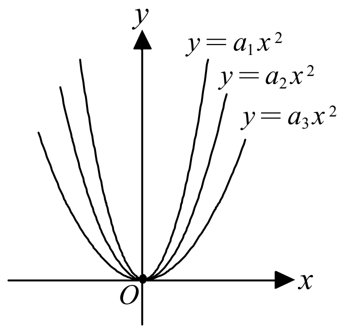
(E)$y=2x^2$ (F)$y=x^2$ 。

比較開口大小：(A) = (B) > (C) = (F) > (D) = (E) 。

結論：$y = ax^2$ 的圖形如下：

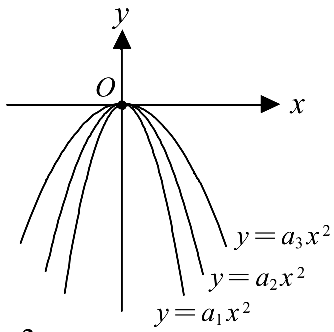
當 $a_i > 0$，$i = 1$、2、3 時，圖形為：

其中 $|a_1| > |a_2| > |a_3|$。



當 $a_i < 0$，$i = 1$、2、3，且 $a_1 < a_2 < a_3$ 時，圖形為：

其中 $|a_1| > |a_2| > |a_3|$。



【範例】：請試著比較 $y = -3x^2$、$y = 2x^2$ 和 $y = -\frac{3}{2}x^2$ 開口的大小。

解　：$\because$ x^2 項係數的絕對值大小會影響開口的大小。

又 $|-3| > |2| > |-\frac{3}{2}|$。

$\therefore$ 開口的大小為：$y = -3x^2 > y = 2x^2 + 1 > y = -\frac{3}{2}x^2$

【範例】：請問下列二次函數哪些開口向下？哪些開口向上？

(1) $y = 2x^2$　(2) $y = -3x^2$　(3) $y = \frac{3}{2}x^2$　(4) $y = -5x^2$。

解　：$\because$ x^2 項係數的正負號決定開口的方向，正的開口向上，負的開口向下。

$\therefore$ 開口向上的有：(1) $y = 2x^2$、(3) $y = \frac{3}{2}x^2$。

開口向上的有：(2) $y = -3x^2$、(4) $y = -5x^2$。

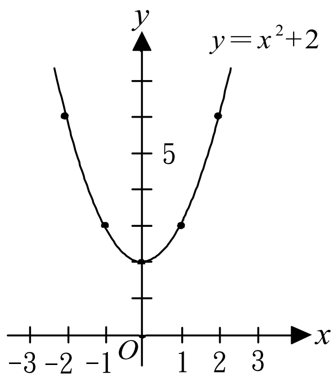
小 試 身 手

【例題 1】

試畫出 $y=x^2+2$ 的圖形。

解：

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6

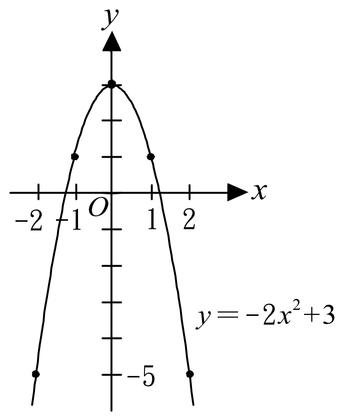


【練習 1】

試畫出 $y=-2x^2+3$ 的圖形。

解：

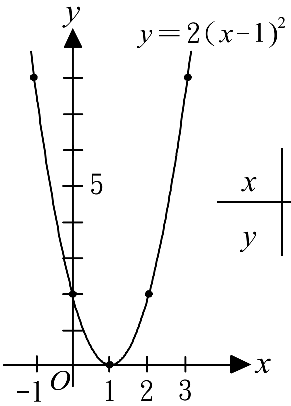
x	-2	-1	0	1	2
y	-5	1	3	1	-5



【例題 2】

試畫出 $y=2(x-1)^2$ 的圖形。

解：



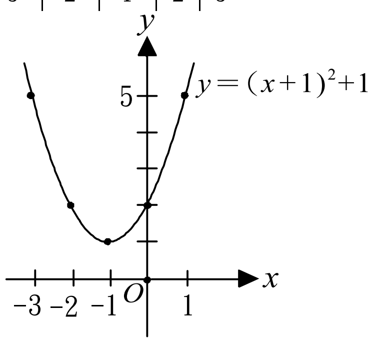
x	-1	0	1	2	3
y	8	2	0	2	8

【練習 2】

試畫出 $y=(x+1)^2+1$ 的圖形。

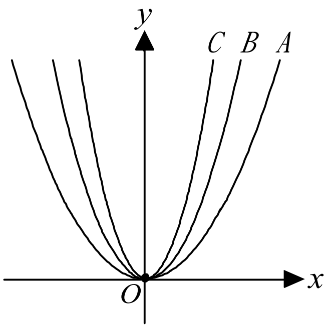
解：

x	-3	-2	-1	0	1
y	5	2	1	2	5



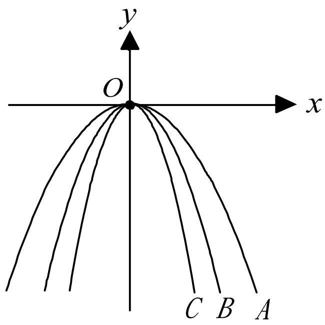
【例題 3】

下圖是 $y=3x^2$，$y=x^2$，$y=\frac{1}{3}x^2$ 的圖形，其中以 $\underline{y=\frac{1}{3}x^2}$ 開口最大，$\underline{y=3x^2}$ 開口最小。$y=3x^2$ 的圖形是 $\underline{C}$，$y=x^2$ 的圖形是 $\underline{B}$，$y=\frac{1}{3}x^2$ 的圖形是 $\underline{A}$。



【練習 3】

下圖是 $y=-x^2$，$y=-2x^2$，$y=-3x^2$ 的圖形，其中以 $\underline{y=-x^2}$ 開口最大，$\underline{y=-3x^2}$ 開口最小。$y=-x^2$ 的圖形是 $\underline{A}$，$y=-2x^2$ 的圖形是 $\underline{B}$，$y=-3x^2$ 的圖形是 $\underline{C}$。



【例題 4】

下列為二次函數：

(A) $y=3x^2$ (B) $y=-1.5x^2$ (C) $y=1.5x^2$

(D) $y=-3x^2$ (E) $y=\frac{1}{3}x^2$ (F) $y=-\frac{2}{3}x^2$

請回答下列問題：

(1) 開口向上有哪些

(2) 開口向下有哪些

(3) 何者開口最大？何者開口最小

解：(1) (A)、(C)、(E)　(2) (B)、(D)、(F)

(3) 最大：(E)　最小：(A)、(D)

【練習 4】

下列為二次函數：

(A) $y=x^2$ (B) $y=-3x^2$ (C) $y=2.5x^2$

(D) $y=-2x^2$ (E) $y=\frac{4}{5}x^2$ (F) $y=-\frac{2}{7}x^2$

請回答下列問題：

(1) 開口向上有哪些

(2) 開口向下有哪些

(3) 何者開口最大？何者開口最小

解：(1) (A)、(C)、(E)　(2) (B)、(D)、(F)

(3) 最大：(F)　最小：(B)

二次函數圖形之平移

1. **形的上、下平移：**

接下來我們來畫形如 $y = ax^2 + k$ 的圖形。

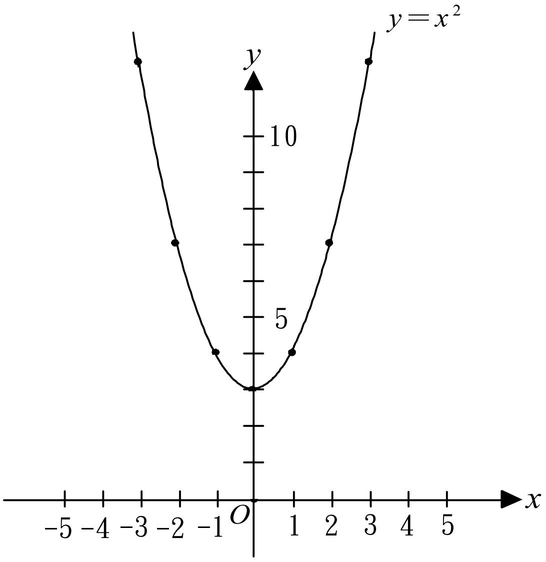
我們知道它的頂點在(0 , k)且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。

【範例】：描繪 $y = x^2 + 3$ 的圖形。

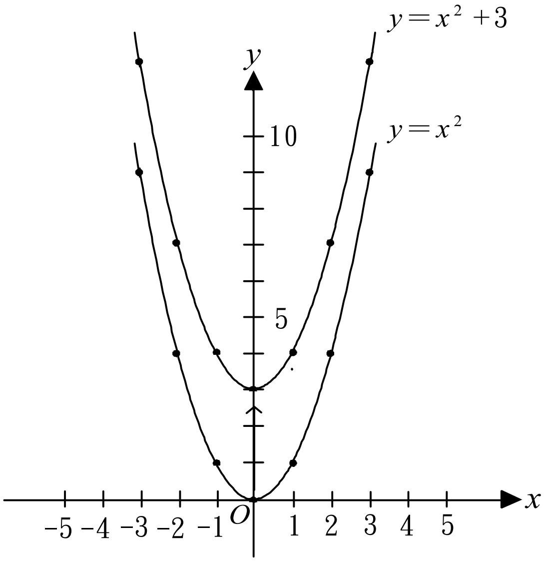
解　：

$y = x^2 + 3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(0, 3)$，且以直線 $x = 0$ 為對稱軸。將函數的對應值列表如右，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。

x	-2	-1	0	1	2
y	7	4	3	4	7



如果我們將 $y = x^2$ 及 $y = x^2 + 3$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



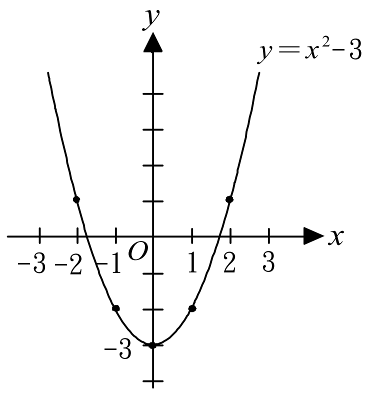
由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y=x^2$ 的圖形(沿 y 軸) **向上移動三個單位長**，即可以得到 $y=x^2+3$ 的圖形。

【**範例**】：描繪 $y=x^2-3$ 的圖形。

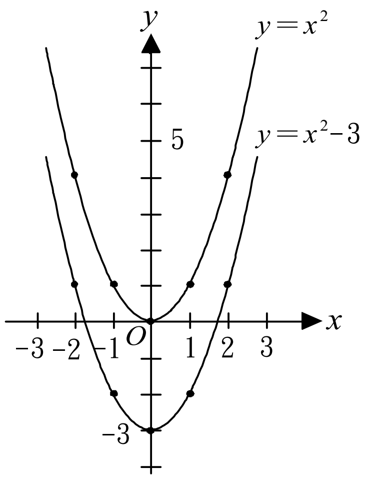
解　：

$y=x^2-3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(0,-3)$，且以直線 $x=0$ 為對稱軸。將函數的對應值列表如右，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1



如果我們將 $y=x^2$ 及 $y=x^2-3$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



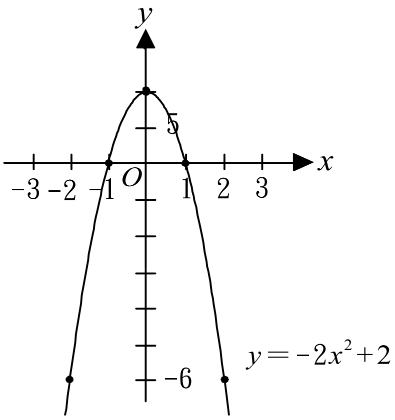
由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y=x^2$ 的圖形(沿 y 軸) **向下移動三個單位長**，即可以得到 $y=x^2-3$ 的圖形。

【範例】：描繪 $y=-2x^2+2$ 的圖形。

解：

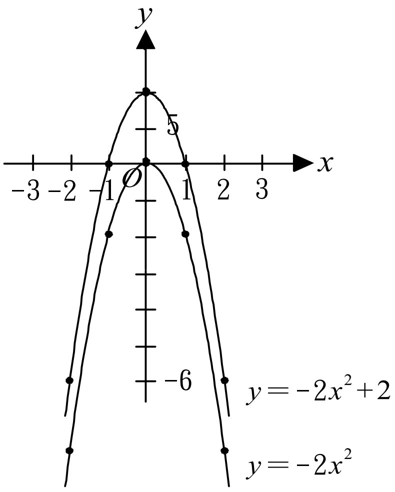
$y=-2x^2+2$ 的圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在 $(0,2)$，且以直線 $x=0$ 為對稱軸。

將對應的函數值列表如下，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



x	-2	-1	0	1	2
y	-6	0	2	0	-6

如果我們將 $y=-2x^2$ 及 $y=-2x^2+2$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



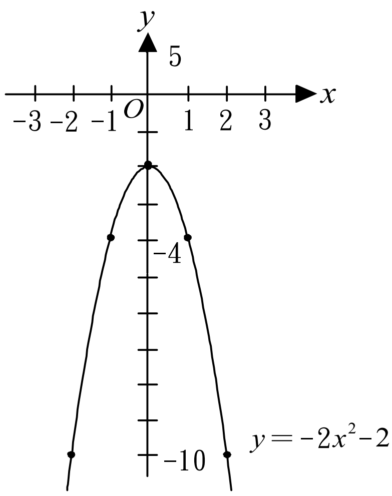
由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y=-2x^2$ 的圖形(沿 y 軸)**向上移動兩個單位長**，即可以得到 $y=-2x^2+2$ 的圖形。

【範例】：描繪 $y=-2x^2-2$ 的圖形。

解　：

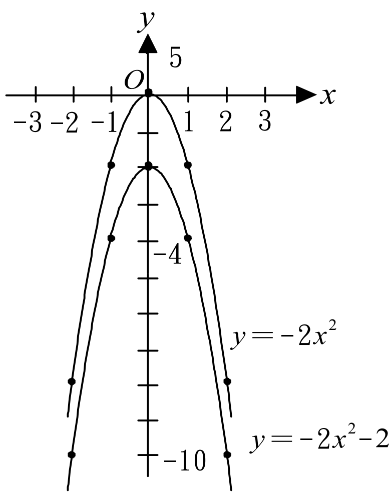
$y=-2x^2-2$ 的圖形是開口向上的拋物線，其頂點位置在 $(0,-2)$，且以直線 $x=0$ 為對稱軸。

將對應的函數值列表如下，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



x	-2	-1	0	1	2
y	-10	-4	-2	-4	-10

如果我們將 $y=-2x^2$ 及 $y=-2x^2-2$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y=-2x^2$ 的圖形(沿 y 軸)**向下移動兩個單位長**，即可以得到 $y=-2x^2+2$ 的圖形。

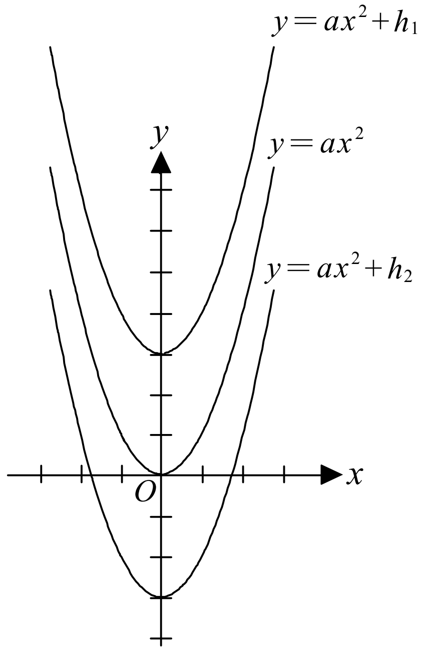
【**結論**】：若有型如 $y = ax^2 + k$ ：

（1）當 $k > 0$，其圖形即是將 $y = ax^2$ 的圖形向上移動 k 單位長。

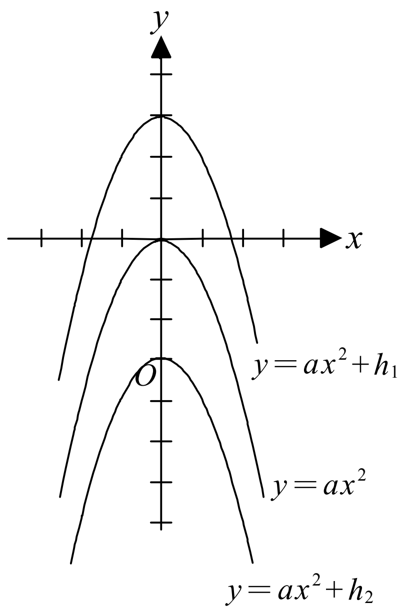
（2）當 $k < 0$，其圖形即是將 $y = ax^2$ 的圖形向下移動 $|k|$ 單位長。

如下圖所示：

當 $a > 0$ 時，



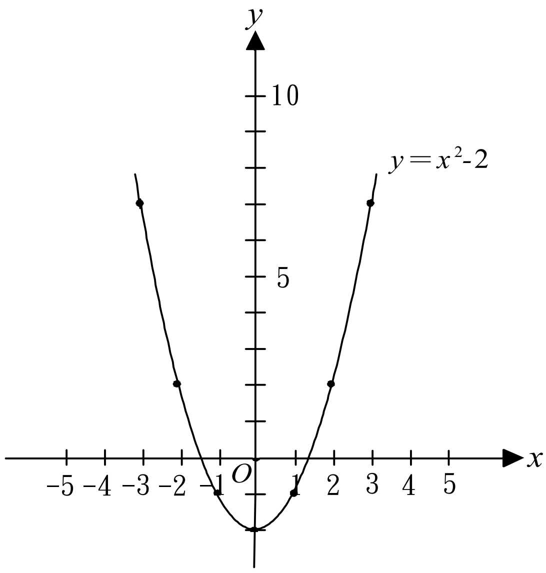
當 $a < 0$ 時，



【**練習**】：（1）將 $y = x^2$ 的圖形(沿 y 軸)向__下__移動__2__個單位長，即可以得到 $y = x^2 - 2$ 的圖形。

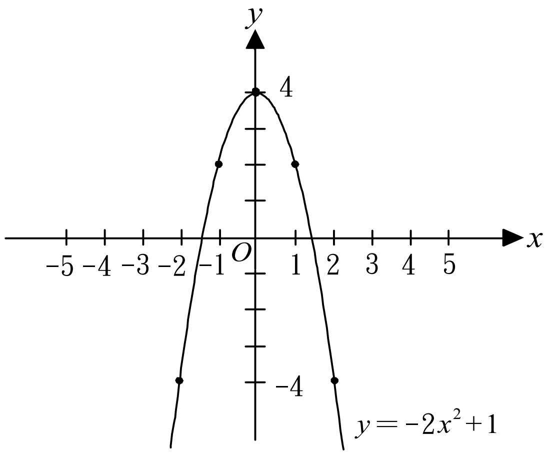
（2）描繪 $y = x^2 - 2$ 的圖形，並寫出頂點坐標。

解　：（2）頂點：$(0, -2)$。



【練習】：描繪 $y=-2x^2+4$ 的圖形，並寫出頂點坐標。

解　：頂點：$(0,4)$。



2. <u>**圖形的左、右平移**</u>：

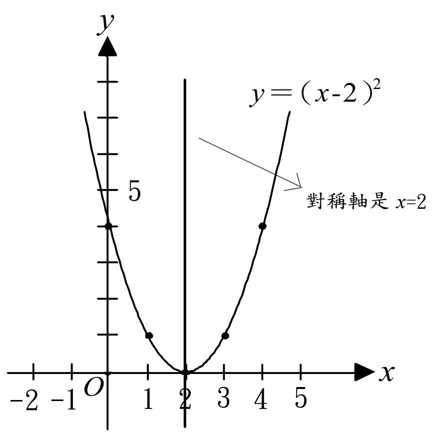
現在我們來畫形如 $y=a(x-h)^2$ 的圖形。

我們知道它的頂點在 $(h, 0)$ 及其對稱軸為直線 $x=h$。

【範例】：描繪 $y=(x-2)^2$ 的圖形。

解　：$y=(x-2)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(2,0)$，且以直線 $x=2$ 為對稱軸。

將函數的對應值列表如上，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



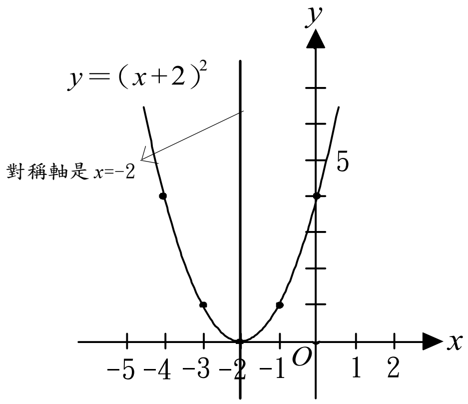
x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

【範例】：描繪 $y=(x+2)^2$ 的圖形。

解　：

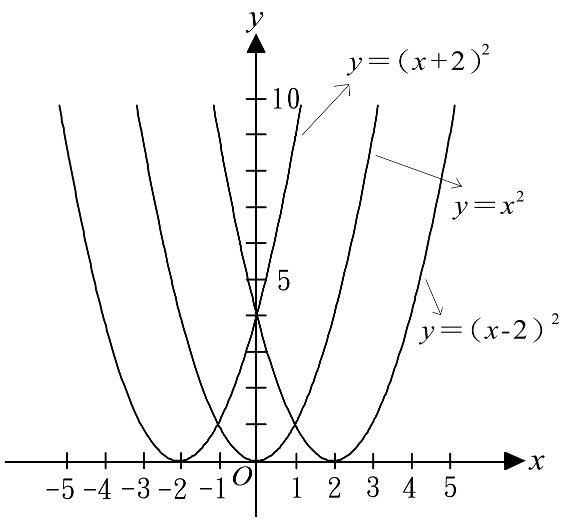
$y=(x+2)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在(1, 0)，且以直線 $x=-2$ 為對稱軸。

將函數的對應值列表如上，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



x	-4	-3	-2	-1	0
y	4	1	0	1	4

【結論】：我們比較 $y=x^2$、$y=(x-2)^2$、$y=(x+2)^2$ 圖形之間的異同。

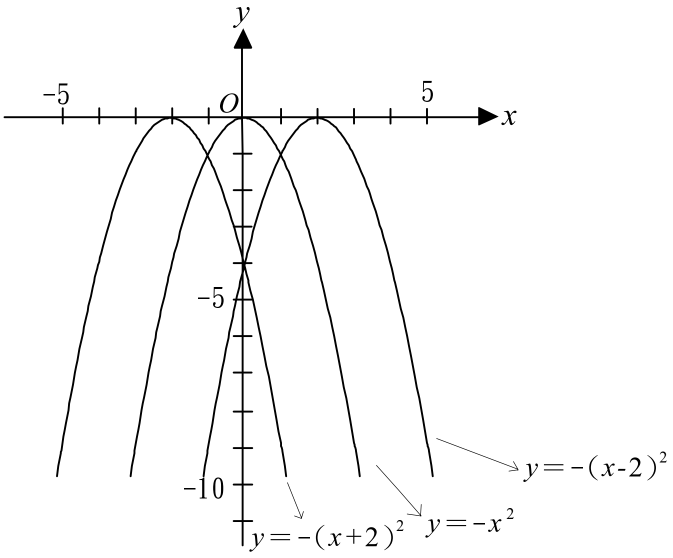


由上圖可知：1. $y=x^2$、$y=(x-2)^2$、$y=(x+2)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。

2. 將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向右移動**二個單位長，即可得到 $y=(x-2)^2$ 的圖形。

3. 將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向左移動**二個單位長，即可得到 $y=(x+2)^2$ 的圖形。

【結論】：我們比較 $y=-x^2$、$y=-(x-2)^2$、$y=-(x+2)^2$ 圖形之間的異同。



由上圖可知：1. $y=-x^2$、$y=-(x-2)^2$、$y=-(x+2)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。

2. 將 $y=-x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向右移動**二個單位長，即可得到 $y=-(x-2)^2$ 的圖形。

3. 將 $y=-x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向左移動**二個單位長，即可得到 $y=-(x+2)^2$ 的圖形。

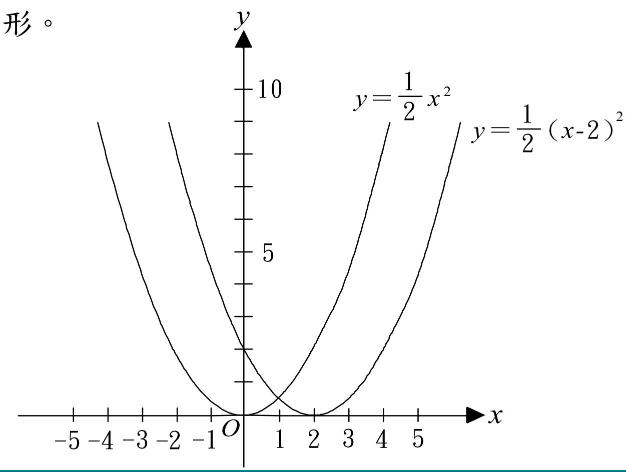
我們稱這樣將圖形左右或上下移動的過程為**平移**。

【範例】：利用 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形來描繪 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的圖形。

解　：

$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在(2, 0)，且以 $x=2$ 為對稱軸。

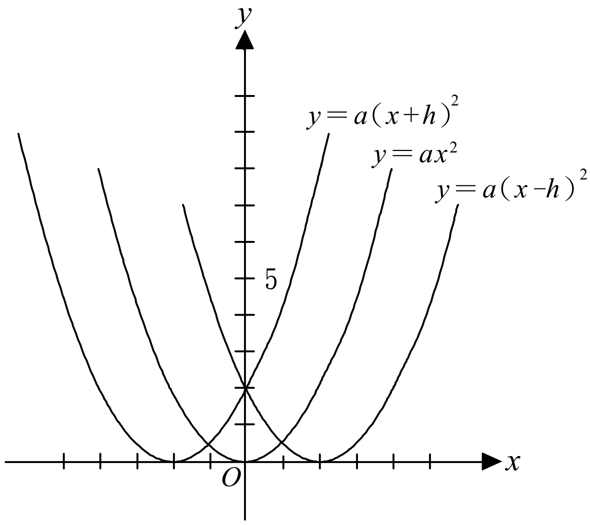
所以，只要將對稱軸為 $x=0$ 的 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形沿 x 軸向右移動二個單位長，即可到所要的圖形。



【結論】：若有型如 $y=a(x-h)^2$，其圖形開口向上：

(1) 當 $h>0$，其圖形即是將 $y=ax^2$ 的圖形向右移動 h 單位長。

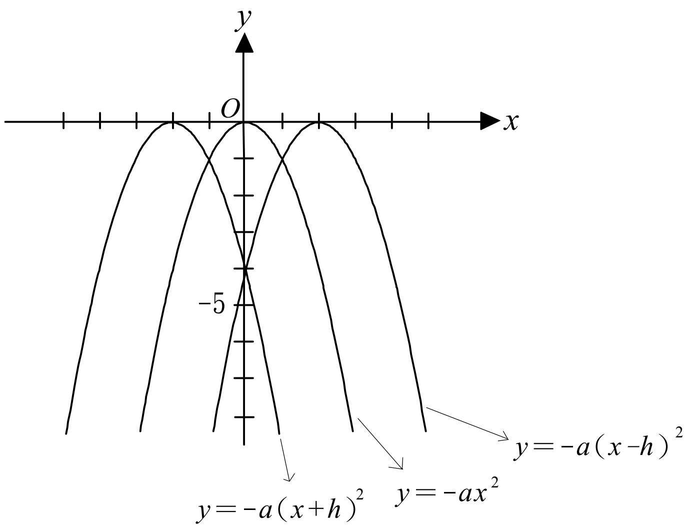
(2) 當 $h<0$，其圖形即是將 $y=ax^2$ 的圖形向左移動 $|h|$ 單位長。



若有型如 $y=-a(x-h)^2$，其圖形開口向下：

(1) 當 $h>0$，其圖形即是將 $y=-ax^2$ 的圖形向右移動 h 單位長。

(2) 當 $h<0$，其圖形即是將 $y=-ax^2$ 的圖形向左移動 $|h|$ 單位長。



【練習】：(1) $y=(x-1)^2$ 的圖形是將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)

向__右__移動__1__個單位長，即可以得到。

(2) $y=-(x+4)^2$ 的圖形是將 $y=-x^2$ 的圖形(沿 x 軸)

向__左__移動__4__個單位長，即可以得到。

3. **圖形的平移**：

現在我們來畫形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。

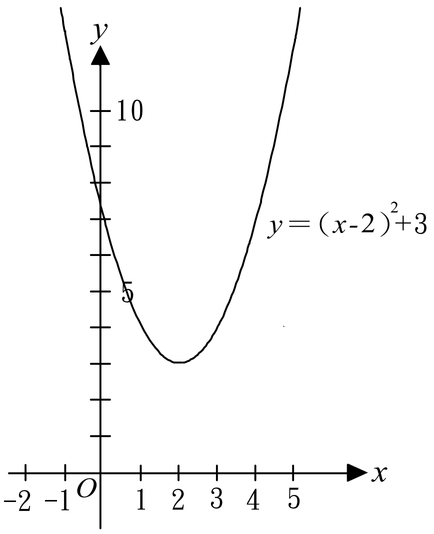
我們知道它的頂點在 (h, k) 及其對稱軸為直線 $x=h$。

【**範例**】：描繪 $y=(x-2)^2+3$ 的圖形。

解：

$y=(x-2)^2+3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(2,3)$，且以直線 $x=2$ 為對稱軸。

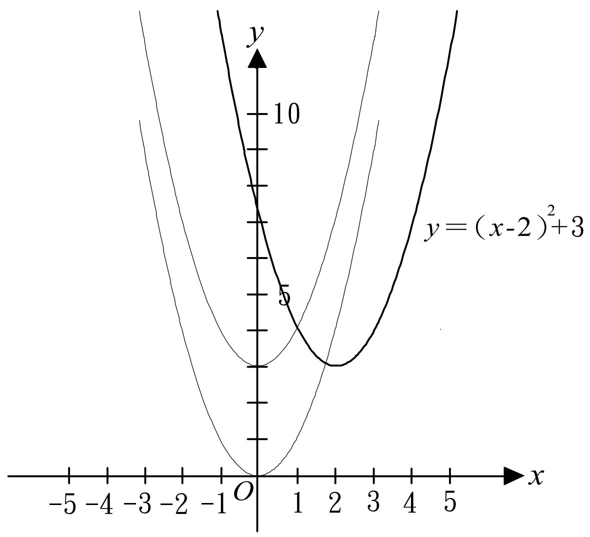
x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7



將 $y=x^2$ 的圖形沿 y 軸向上平移三個單位長，可得 $y=x^2$ 的圖形，然後再沿 x 軸向右平移二個單位長，即可得到 $y=(x-2)^2+3$ 的圖形。

當然也可將 $y=x^2$ 圖形沿 x 軸向右平移二個單位長，可得 $y=(x-2)^2$ 的圖形，然後再沿 y 軸向上平移三個單位長，亦得到 $y=(x-2)^2+3$ 的圖形。

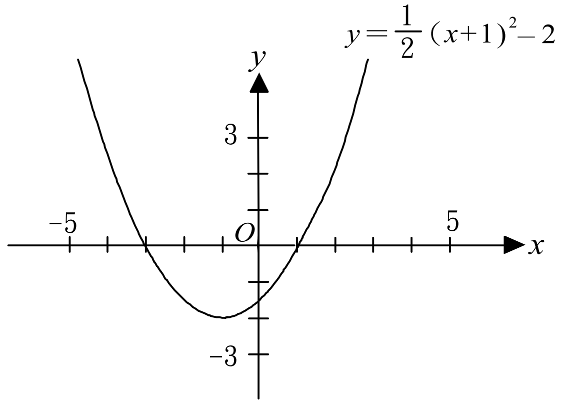
如下頁圖所示。



【範例】：描繪 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$ 的圖形。

解　：

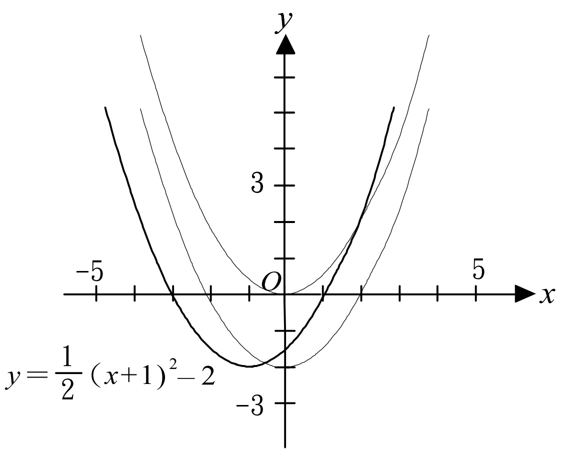
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(-1,-2)$，且以直線 $x=-1$ 為對稱軸。



將 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形沿 y 軸向下平移二個單位長，可得 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的圖形，然後再沿 x 軸向左平移一個單位長，即可得到 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$ 的圖形。

當然也可將 $y=\frac{1}{2}x^2$ 圖形沿 x 軸向左平移一個單位長，可得 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的圖形，然後再沿 y 軸向下平移二個單位長，亦得到 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-2$ 的圖形。

如下頁圖所示。



【結論】：1. 對方程式 $y=a(x-h)^2+k$ 而言，若 $h>0$，$k>0$，

則有下列四種情形：

(1) 把 $y=ax^2$ 的圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，得到 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。

(2) 把 $y=ax^2$ 的圖形向右平移 h 單位，向下平移 k 單位，得到 $y=a(x-h)^2-k$ 的圖形。

(3) 把 $y=ax^2$ 的圖形向左平移 h 單位，向上平移 k 單位，得到 $y=a(x+h)^2+k$ 的圖形。

(4) 把 $y=ax^2$ 的圖形向左平移 h 單位，向下平移 k 單位，得到 $y=a(x+h)^2-k$ 的圖形。

2. 型如 $y=a(x-h)^2+k$ 之二次函數的探討

(1) ① $a>0$，代表二次函數圖形的開口向上；

② $a<0$，代表二次函數圖形的開口向下；

③ a 的絕對值越大，則開口越小；

④ a 的絕對值越小，則開口越大；

(2) (h ， k) 代表二次圖形的頂點。

(3) $x-h=0$ 為二次函數圖形的對稱軸。

【範例】：描繪 $y=-2x^2-4x+1$ 的圖形。

解　：我們先利用配方法將方程式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

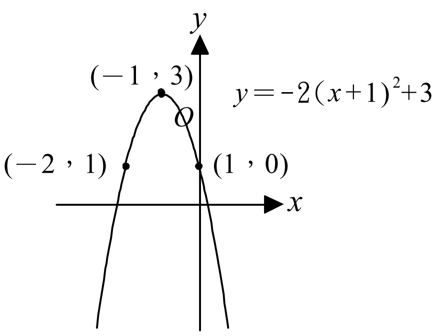
$y=-2x^2-4x+1 \Leftrightarrow y=-2(x^2+2x)+1$

$\Leftrightarrow y=-2(x^2+2x+1)+1+2$

$\Leftrightarrow y=-2(x+1)^2+3$

因此，現在只需描繪出 $y=-2(x+1)^2+3$ 的圖形就可以了。

$y=-2(x+1)^2+3$ 的圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在(－1，3)，且以直線 $x=-1$ 為對稱軸。



將 $y=-2x^2$ 的圖形沿 y 軸向上平移 3 個單位長，可得 $y=-2x^2+3$ 的圖形，然後再沿 x 軸向左平移一個單位長，即可得到 $y=-2(x+1)^2+3$ 的圖形。

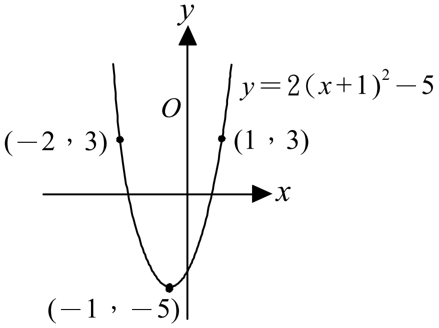
【範例】：描繪 $y=2x^2+4x-3$ 的圖形。

解　：我們先利用配方法將方程式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$y=2x^2+4x-3 \Leftrightarrow y=2(x^2+2x)-3$$
$$\Leftrightarrow y=2(x^2+2x+1)-3-2$$
$$\Leftrightarrow y=2(x+1)^2-5$$

因此，現在只需描繪出 $y=2(x+1)^2-5$ 的圖形就可以了。

$y=2(x+1)^2-5$ 的圖形是開口向上的拋物線，其頂點位置在$(-1，-5)$，且以直線 $x=-1$ 為對稱軸。



將 $y=2x^2$ 的圖形沿 y 軸向下平移 5 個單位長，可得 $y=2x^2-5$ 的圖形，然後再沿 x 軸向左平移一個單位長，即可得到 $y=2(x+1)^2-5$ 的圖形。

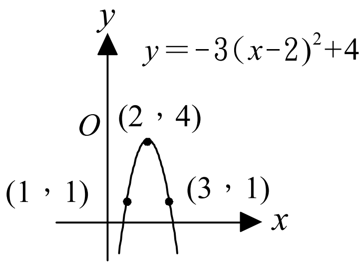
【範例】：描繪 $y=-3x^2+12x-8$ 的圖形。

解　：我們先利用配方法將方程式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$y=-3x^2+12x-8 \Leftrightarrow y=-3(x^2-4x)-8$$
$$\Leftrightarrow y=-3(x^2-4x+4)-8+12$$
$$\Leftrightarrow y=-3(x-2)^2+4$$

因此，現在只需描繪出 $y=-3(x-2)^2+4$ 的圖形就可以了。

$y=-3(x-2)^2+4$ 的圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在$(2，4)$，且以直線 $x=2$ 為對稱軸。



將 $y=-3x^2$ 的圖形沿 y 軸向上平移 4 個單位長，可得 $y=-3x^2+4$ 的圖形，然後再沿 x 軸向右平移 2 個單位長，即可得到 $y=-3(x-2)^2+4$ 的圖形。

小 試 身 手

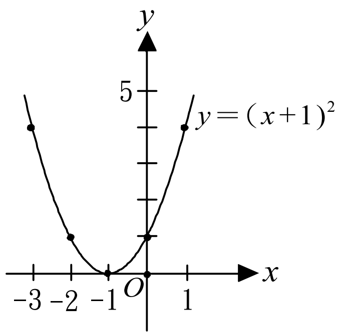
【例題 1】

畫出下列二次函數圖形，並指出頂點及對稱軸：

(1) $y=(x+1)^2$　　(2) $y=-2(x-2)^2$

解：(1)

x	-3	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1	4

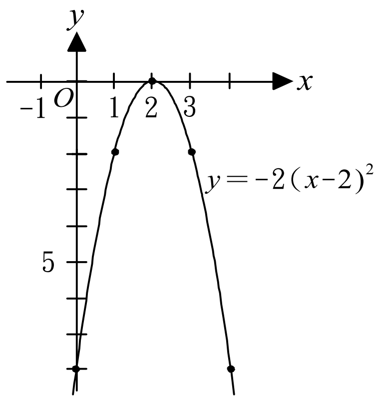


頂點：$(-1，0)$

對稱軸：$x+1=0$

(2)

x	0	1	2	3	4
y	-8	-2	0	-2	-8



頂點：$(2，0)$

對稱軸：$x-2=0$

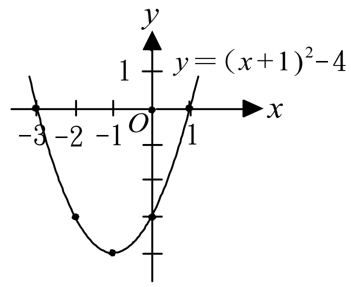
【練習 1】

畫出下列二次函數圖形，並指出頂點及對稱軸：

(1) $y=(x+1)^2-4$　　(2) $y=-2(x-2)^2+4$

解：(1)

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	-3	-4	-3	0

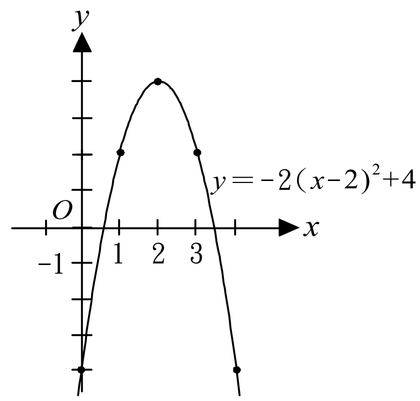


頂點：$(-1，-4)$

對稱軸：$x+1=0$

(2)

x	0	1	2	3	4
y	-4	2	4	2	-4



頂點：$(2，4)$

對稱軸：$x-2=0$

【例題 2】

$y=2x^2-12x+20$ 的圖形，可由函數 $y=2x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向上平移 k 單位而成，試求(h ， k)＝？

解：Θ $y=2x^2-12x+20$

$=2(x^2-6x+9)+20-18$

$=2(x-3)^2+2$

∴（ h ， k)＝(3 ， 2 ）

【練習 2】

$y=-2x^2+8x-4$ 的圖形，可由函數 $y=-2x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向上平移 k 單位而成，試求(h ， k)＝？

解：Θ $y=-2x^2+8x-4$

$=-2(x^2-4x+4)-4+8$

$=2(x-2)^2+4$

∴（ h ， k)＝(2 ， 4 ）

【例題 3】

$y=2x^2-5x$ 的圖形是由 $y=2x^2$ 的圖形向 __右__ 平移 $\frac{5}{4}$ 個單位長，再向 __下__ 平移 $\frac{25}{8}$ 個單位長而得

解：Θ $y=2x^2-5x$

$=2(x^2-\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2)-2\cdot(\frac{5}{4})^2$

$=2(x-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{8}$

【練習 3】

$y=3x^2-8x$ 的圖形是由 $y=3x^2$ 的圖形向 __右__ 平移 $\frac{4}{3}$ 個單位長，再向 __下__ 平移 $\frac{16}{3}$ 個單位長而得

解：Θ $y=3x^2-8x$

$=3(x^2-\frac{8}{3}x+(\frac{4}{3})^2)-3\cdot(\frac{4}{3})^2$

$=3(x-\frac{4}{3})^2-\frac{16}{3}$

【例題 4】

一拋物線通過（2，1）(-1，14）兩點，且圖形經平移後與 $y=x^2$ 重合，求此拋物線的二次函數。

解：設其方程式為 $y=(x-h)^2+k$

將兩點代入得

$$\begin{cases} 1=(2-h)^2+k & \Lambda\ (1) \\ 14=(-1-h)^2+k & \Lambda\ (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ ： $-16=-6h \quad \Rightarrow \quad h=\frac{8}{3}$

$\Rightarrow \quad k=\frac{5}{9}$

其方程式為 $y=(x-\frac{8}{3})^2+\frac{5}{9}$

【練習 4】

一拋物線通過（1，-1）(-5，-13）兩點，且圖形經平移後與 $y=x^2$ 重合，求此拋物線的二次函數。

解：設其方程式為 $y=(x-h)^2+k$

將兩點代入得

$$\begin{cases} -1=(1-h)^2+k & \Lambda\ (1) \\ -13=(-5-h)^2+k & \Lambda\ (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ ： $36=-12h \quad \Rightarrow \quad h=-3$

$\Rightarrow \quad k=-17$

其方程式為 $y=(x+3)^2-17$

【例題 5】

$y=3x^2-7x$ 的圖形，可由函數 $y=3x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向下平移 k 單位而成，試求(h ， k)＝？

解： $y=3x^2-7x$

$=3(x^2-\frac{7}{3}x+(\frac{7}{6})^2)-3\cdot(\frac{7}{6})^2$

$=3(x-\frac{7}{6})^2-\frac{49}{12}$

$\therefore$ （ h ， k ）＝($\frac{7}{6}$ ， $\frac{49}{12}$)

【練習 5】

$y=-4x^2+16x$ 的圖形，可由函數 $y=-4x^2$ 的圖形向右平移 h 單位後，再向上平移 k 單位而成，試求(h ， k)＝？

解： $y=-4x^2+16x$

$=-4(x^2-4x+2^2)+4\cdot 2^2$

$=-4(x-2)^2+16$

$\therefore$ （ h ， k ）＝（ 2 ，16 ）

【例題 6】

有一二次函數圖形的頂點座標為（-1，2）且其圖形通過（0，1），試求此二次函數。

解：設此二次函數為 $y=a(x+1)^2+2$

以（0，1）代入得 $1=a+2$

$\therefore a=-1$

$\Rightarrow\ y=-(x+1)^2+2$

【練習 6】

有一二次函數圖形的頂點座標為（3，-4）且其圖形通過（1，3），試求此二次函數。

解：設此二次函數為 $y=a(x-3)^2-4$

以（1，4）代入得 $4=4a-4$

$\therefore a=2$

$\Rightarrow\ y=2(x-3)^2-4$

【例題 7】

設二次函數對稱軸為 $x=5$，且通過（1，2）、（0，-7）兩點，求此二次函數為何？

解：設方程式為 $y=a(x-5)^2+k$

將兩點代入得

$$\begin{cases} 2=a(1-5)^2+k & \Lambda\ (1) \\ -7=a(0-5)^2+k & \Lambda\ (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} 2=16a+k & \Lambda\ (3) \\ -7=25a+k & \Lambda\ (4) \end{cases}$$

$(3)-(4)$ ： $9=-9a\ \Rightarrow\ a=-1$

$\Rightarrow\ k=18$

所以方程式為 $y=-(x-5)^2+18$

【練習 7】

設二次函數對稱軸為 $x=-3$ ，且通過（1，33）、（-3，1）兩點，求此二次函數為何？

解：設方程式為 $y=a(x+3)^2+k$

將兩點代入得

$$\begin{cases} 33=a(1+3)^2+k & \Lambda\ (1) \\ 1=a(-3+3)^2+k & \Lambda\ (2) \end{cases}$$

由 (1) 得： $k=1\ \Rightarrow\ a=2$

所以方程式為 $y=2(x+3)^2+1$