最大值與最小值

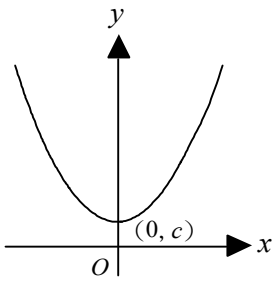
1. $y=ax^2+c$ 的最大(小)值：

$y=ax^2+c$，對稱軸為 $x=0$。

(1) $a>0$ 時： a. 開口向上；(如圖一)

b. 當 $x=0$，y 有最小值 c；

c. 頂點為$(0，c)$，為最低點。

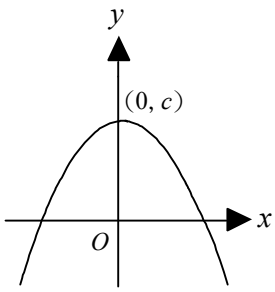


(圖一)

(2) $a<0$ 時： a. 開口向下；(如圖二)

b. 當 $x=0$，y 有最大值 c；

c. 頂點為$(0，c)$，為最高點。



(圖二)

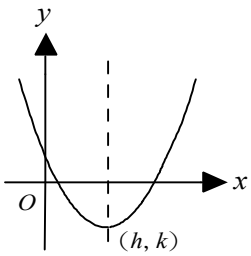
2. $y=a(x-h)^2+k$ 的最大(小)值：

$y=a(x-h)^2+k$，對稱軸為 $x-h=0$。

(1) $a>0$ 時： a. 開口向上；(如圖三)

b. 當 $x=h$，y 有最小值 k；

c. 頂點為$(h，k)$，為最低點。

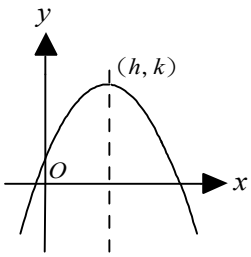


(圖三)

(2) $a<0$ 時： a. 開口向下；(如圖四)

b. 當 $x=h$，y 有最大值 k；

c. 頂點為$(h，k)$，為最高點。



(圖四)

3. $y=ax^2+bx+c$ 的最大(小)值：

(1) 利用配方法將 $y=ax^2+bx+c$ 推演成 $y=a(x-h)^2+k$ 來找出頂點座標(h，k)，然後即可描繪其圖形，並且得其最大(小)值。

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2\right]+c-a\times(\frac{b}{2a})^2 \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a} \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

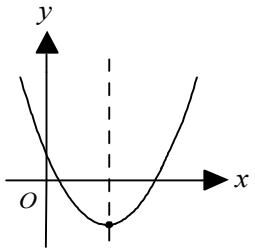
因此可得知 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點座標為$(-\frac{b}{2a}，-\frac{b^2-4ac}{4a})$。

(2) $y=ax^2+bx+c$，對稱軸為 $x+\frac{b}{2a}=0$。

1. $a>0$ 時： a. 開口向上；(如圖五)

b. 當 $x=-\frac{b}{2a}$，y 有最小值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$；

c. 頂點 $(-\frac{b}{2a}，-\frac{b^2-4ac}{4a})$，為最低點。

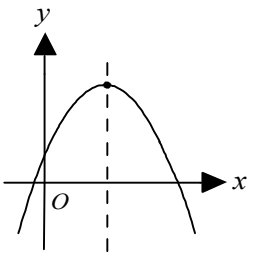


(圖五)

2. $a<0$ 時： a. 開口向下；(如圖六)

b. 當 $x=-\frac{b}{2a}$，y 有最大值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$；

c. 頂點 $(-\frac{b}{2a}，-\frac{b^2-4ac}{4a})$，為最高點。



(圖六)

【範例】：方程式 $y=2x^2-4x+3$ 是否有最大值或最小值？

解　：我們先利用配方法將方程式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$y=2x^2-4x+3 \Leftrightarrow y=2(x^2-2x)+3$

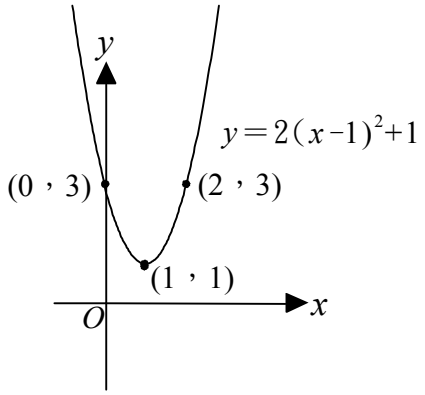
$\Leftrightarrow y=2(x^2-2x+1)+3-2$

$\Leftrightarrow y=2(x-1)^2+1$

因此，$y=2(x-1)^2+1$ 的圖形是開口向上的拋物線，有最小值為 $y=1$。

頂點位置在(1，1)，且以直線 $x=1$ 為對稱軸。

圖形如下：



【範例】：方程式 $y=-3x^2+12x-16$ 是否有最大值或最小值？

解　：我們先利用配方法將方程式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$y=-3x^2+12x-16 \Leftrightarrow y=-3(x^2-4x)-16$

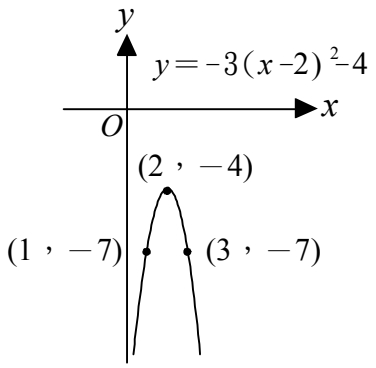
$\Leftrightarrow y=-3(x^2-4x+4)-16+12$

$\Leftrightarrow y=-3(x-2)^2-4$

因此，$y=-3(x-2)^2-4$ 的圖形是開口向下的拋物線，有最大值為 $y=-4$。

頂點位置在(2，−4)，且以直線 $x=2$ 為對稱軸。

圖形如下：



小 試 身 手

【例題 1】

$y=(x+1)^2-4$：

(1) $x=$ -1 時，y 有最 小 值為 -4 ；

(2) 頂點坐標為 (-1，-4) ；

(3) 對稱軸為 $x+1=0$ ；

(4) 與 x 軸交點為 (1，0) 與 (-3，0)；

(5) 與 y 軸交點為 (0，-3)。

【練習 1】

$y=x^2+2x$：

(1) $x=$ -1 時，y 有最 小 值為 -1 ；

(2) 頂點坐標為 (-1，-1) ；

(3) 對稱軸為 $x+1=0$ ；

(4) 與 x 軸交點為 (0，0) 與 (-2，0) ；

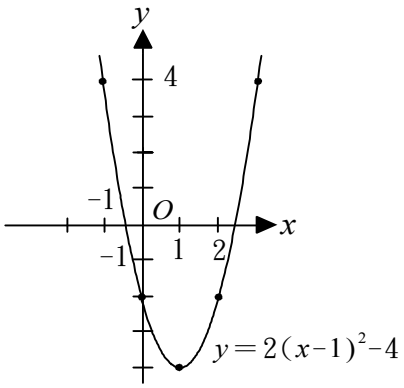
(5) 與 y 軸交點為 (0，0)。

【例題 2】

試由下列各二次函數的圖形，寫出其頂點坐標、對稱軸及 y 的最大或最小值。

(1) $y=2(x-1)^2-4$　　(2) $y=-2(x-5)^2+6$

解：(1)



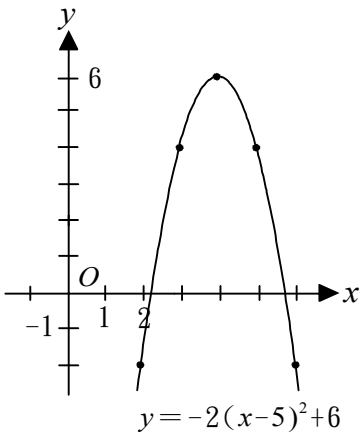
頂點坐標為(-1，-4)

對稱軸為 $x-1=0$

Θ x^2 項的係數為正數

$\therefore$ y 有最小值為 -4

(2)



頂點坐標為(5，6)

對稱軸為 $x-5=0$

Θ x^2 項的係數為負數

$\therefore$ y 有最大值為 6

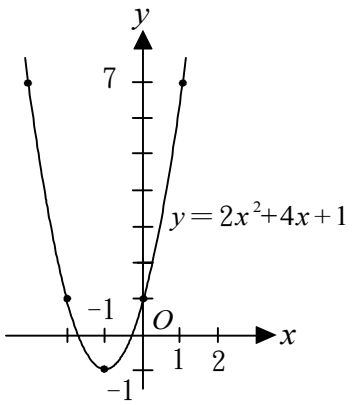
【練習 2】

試由下列各二次函數的圖形，寫出其頂點坐標、對稱軸及 y 的最大或最小值。

(1) $y=2x^2+4x+1$　　(2) $y=4-4x-2x^2$

解：(1) $y=2x^2+4x+1$

$=2(x+1)^2-1$



頂點坐標為(−1，−1)

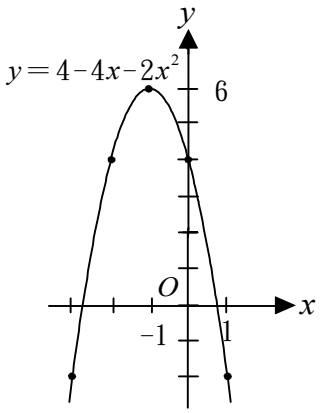
對稱軸為 $x+1=0$

Θ x^2 項的係數為正數

$\therefore$ y 有最小值為 -1

(2) $y=4-4x-2x^2$

$=-2(x+1)^2+6$



頂點坐標為(−1，6)

對稱軸為 $x+1=0$

Θ x^2 項的係數為負數

$\therefore$ y 有最大值為 6

【例題 3】

試求下列之最大值：

(1) $(7-x)(x+1)$　　(2) $\dfrac{1}{x^2+(10-x)^2}$

解：(1) $(7-x)(x+1)=7x-x^2+7-x=-x^2+6x+7$

$=-(x^2-6x+9)+7+9=-(x-3)^2+16$　　$\therefore$ 有最大值為 16

(2) $\dfrac{1}{x^2+(10-x)^2}=\dfrac{1}{x^2+100-20x+x^2}=\dfrac{1}{2x^2-20x+100}$

$=\dfrac{1}{2(x^2-10x+25)+100-50}=\dfrac{1}{2(x-5)^2+50}$

$\therefore$ 有最大值為 $\dfrac{1}{50}$

【練習 3】

試求下列之最小值：

(1) $(x+6)(3x+2)$　　(2) $\dfrac{1}{-x^2-(10-x)^2}$

解：(1) $(x+6)(3x+2)=3x^2+18x+2x+12=3(x^2+\dfrac{20}{3}x+(\dfrac{10}{3})^2)+12-3\cdot(\dfrac{10}{3})^2$

$=3(x+\dfrac{10}{3})^2-\dfrac{64}{3}$　　$\therefore$ 有最小值為 $-\dfrac{64}{3}$

(2) $\dfrac{1}{-x^2-(10-x)^2}=\dfrac{1}{-x^2-100+20x-x^2}=\dfrac{1}{-2x^2+20x-100}$

$=\dfrac{1}{-2(x^2-10x+25)-100+50}=\dfrac{1}{-2(x-5)^2-50}$

$\therefore$ 有最小值為 $-\dfrac{1}{50}$

【例題 4】

若 $(a-1):(b+1):(c+2)=1:2:3$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值及 a 值

解：Θ $(a-1):(b+1):(c+2)=1:2:3$

$\therefore$ 假設 $\begin{cases} a=x+1 \\ b=2x-1 \\ c=3x-2 \end{cases}$

代入 $a^2+b^2+c^2=(x+1)^2+(2x-1)^2+(3x-2)^2$

$=x^2+2x+1+4x^2-4x+1+9x^2-12x+4$

$=14x^2-14x+6=14(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ 當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，$a^2+b^2+c^2$ 有最小值為 $\dfrac{5}{2}$ 且 $a=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

【練習 4】

若 $(a+1):(b+2):(c+3)=3:4:5$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值及 a 值

解：Θ $(a+1):(b+2):(c+3)=3:4:5$

$\therefore$ 假設 $\begin{cases} a=3x-1 \\ b=4x-2 \\ c=5x-3 \end{cases}$

代入 $a^2+b^2+c^2=(3x-1)^2+(4x-2)^2+(5x-3)^2$

$=9x^2-6x+1+16x^2-16x+4+25x^2-30x+9$

$=50x^2-52x+14=50(x-\dfrac{13}{25})^2+\dfrac{12}{25}$

$\therefore$ 當 $x=\dfrac{13}{25}$ 時，$a^2+b^2+c^2$ 有最小值為 $\dfrac{12}{25}$ 且 $a=3\times\dfrac{13}{25}-1=\dfrac{14}{25}$

【例題 5】

二次函數 $y=-3x^2+ax+b$，當 $x=3$ 時，y 有最大值 4，則 $a+b=$？

解：假設此二次函數為

$$y=-3(x-3)^2+4$$
$$=-3(x^2-6x+9)+4$$
$$=-3x^2+18x-23$$

又 $y=-3x^2+ax+b$

$\therefore\ a=18$，$b=-23$

$a+b=18-23=-5$

【練習 5】

二次函數 $y=-2x^2+ax-b$，當 $x=2$ 時，y 有最大值 12，則 $a-b=$？

解：假設此二次函數為

$$y=-2(x-2)^2+12$$
$$=-2(x^2-4x+4)+12$$
$$=-2x^2+8x+4$$

又 $y=-2x^2+ax-b$

$\therefore\ a=8$，$b=-4$

$a-b=8-(-4)=12$

【例題 6】

已知 $x+2y=20$，當 $x=$ ＿4＿，$y=$ ＿8＿，x^2+y^2 有最小值為 ＿80＿。

解：$x=20-2y$

$$x^2+y^2=(20-2y)^2+y^2$$
$$=5y^2-80y+400$$
$$=5(y^2-16y+64)+400-5\cdot 64$$
$$=5(y-8)^2+80$$

$\therefore\ x=20-2\cdot 8=4$

【練習 6】

已知 $x+y=30$，當 $x=$ ＿15＿，$y=$ ＿15＿，x^2+y^2 有最小值為 ＿80＿。

解：$x=30-y$

$$x^2+y^2=(30-y)^2+y^2$$
$$=2y^2-60y+900$$
$$=2(y^2-30y+15^2)+450$$
$$=2(y-15)^2+450$$

$\therefore\ x=30-15=15$

【例題 7】

A、B 為數線上的兩點，它們的坐標分別為 7、2，在此數線上求一點 P 的坐標，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的值為最小且最小為多少？

解：設 P 的坐標為 x

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=|x-2|^2+|x-7|^2$$
$$=(x-2)^2+(x-7)^2$$
$$=x^2-4x+4+x^2-14x+49$$
$$=2x^2-18x+53$$
$$=2(x-\frac{9}{2})^2+\frac{25}{2}$$

$\therefore P$ 的坐標為 $\frac{9}{2}$ 時，

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最小值為 $\frac{25}{2}$

【練習 7】

A、B 為數線上的兩點，它們的坐標分別為 6、-4，在此數線上求一點 P 的坐標，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的值為最小且最小為多少？

解：設 P 的坐標為 x

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=|x-6|^2+|x-(-4)|^2$$
$$=(x-6)^2+(x+4)^2$$
$$=x^2-12x+36+x^2+8x+16$$
$$=2x^2-4x+52$$
$$=2(x-1)^2+50$$

$\therefore P$ 的坐標為 1 時，

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 有最小值為 50

【例題 8】

一果園中種 20 棵芭樂，每棵平均可生產芭樂 400 個，若在此園中，每加種一棵，則每棵平均生產量減少 8 個，問應加種幾棵，才能使此園的產量達到最大？ 最大產量是多少個芭樂？

解：設加種 x 棵，可得最大產量 y 個芭樂

$$\begin{aligned} y &= (x+20)(400-8x) \\ &= 400x+8000-8x^2-160x \\ &= -8x^2+240x+8000 \\ &= -8(x-15)^2+9800 \le 9800 \end{aligned}$$

答：加種 15 棵時，

可得最大產量 9800 元

【練習 8】

阿呆在柑園裡種 30 棵柑樹，每棵年產 600 個柑橘，若在此園中，每加種 1 棵，則每棵每年少產 10 個，則共種多少棵時，此園年產量達最大？ 最大產量是多少個？

解：設加種 x 棵，可得最大產量 y 個柑橘

$$\begin{aligned} y &= (x+30)(600-10x) \\ &= 600x+18000-10x^2-300x \\ &= -10x^2+300x+18000 \\ &= -10(x-15)^2+20250 \le 20250 \\ &\therefore\ 30+15=45 \end{aligned}$$

答：共種 45 棵時，

可得最大產量 20250 元

【例題 9】

某商人銷售商品，每件商品的成本 300 元，售價 400 元，每月可售出 500 件。商人估計售價每增加 1 元，銷售量將隨之減少 10 件；而售價每降低 1 元，銷售量將增加 10 件，則

(1)商人應將售價調整為多少元，獲利可最大？

(2)如果商人估計正確，則每月最多可增加獲利多少元？

解：(1)設每件售價增加 x 元，總獲利 y 元

$$\begin{aligned} y &= (400+x-300)(500-10x) \\ &= 50000+500x-1000x-10x^2 \\ &= -10x^2-500x+50000 \\ &= -10(x+25)^2+56250 \le 56250 \end{aligned}$$

當 $x=-25$ 時，

即售價為 $400-25=375$

(2)原獲利 $(400-300)\times 500=50000$

增加獲利 $56250-50000=6250$

答：(1) 375 元 ；(2) 6250 元

【練習 9】

瘋子旅行社招攬環島旅行團，預定人數為 30 人，每人收費 5000 元，但若增加一人，則每人減收 100 元，問應增加多少人，這個旅行社才能收到最多錢？ 最多共多少錢？

解：設增加 x 人，最多可收 y 元

$$\begin{aligned} y &= (30+x)(5000-100x) \\ &= 150000+5000x-3000x-100x^2 \\ &= -100x^2+2000x+150000 \\ &= -100(x^2-10)^2+160000 \le 160000 \end{aligned}$$

答：增加 10 人，

最多可收得 160000 元