# 二次函數之討論與應用

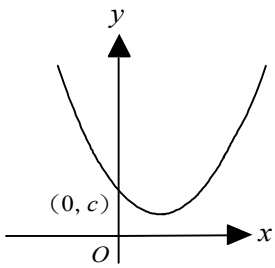
Ⅰ. 二次函數與兩軸交點之討論：

1. 若 $a \neq 0$，$y = ax^2 + bx + c$ 圖形與 $y$ 軸的交點：

$y = ax^2 + bx + c$

令 $x = 0 \Rightarrow y = c$，即與 $y$ 軸交於$(0，c)$，如圖一。

令 $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab}}{2a}$



（圖一）

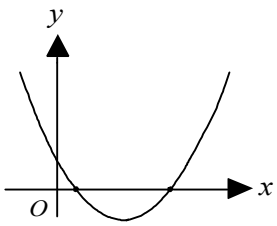
2. 若 $y = 0$ 且 $a \neq 0$，$y = ax^2 + bx + c$ 圖形與 $x$ 軸的交點：

(1) 當判別式 $b^2 - 4ac > 0$：

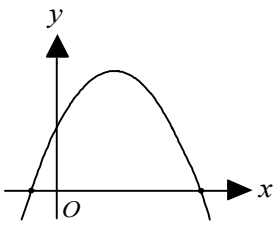
a. 方程式根為兩相異實根，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab}}{2a}$。

b. 圖與 $x$ 軸的交點為相異兩交點。

c. $a > 0$（開口向上，如圖二）；$a < 0$（開口向下，如圖三）。



（圖二）



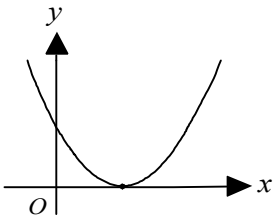
（圖三）

(2) 當判別式 $b^2 - 4ac = 0$：

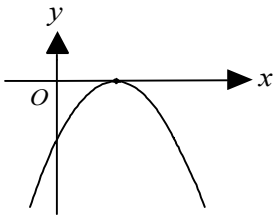
a. 方程式根為兩相等實根，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab}}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$。

b. 圖與 $x$ 軸的交點為相切(一交點)。

c. $a > 0$（開口向上，如圖四）；$a < 0$（開口向下，如圖五）。



（圖四）



（圖五）

3. 已知三點坐標，求過三點的二次函數，將三點坐標代入 $y=ax^2+bx+c$ 。

【範例】：已知某二次函數其圖形通過 $A(1，8)$、$B(-2，2)$、$C(0，4)$，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將 $A(1，8)$、$B(-2，2)$、$C(0，4)$三點代入方程式中得

$$\begin{cases} 8=a+b+c \\ 2=4a-2b+c \\ 4=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$$

所以，此二次函數為 $y=x^2+3x+4$ 。

【範例】：已知三點座標為 $A(-1，2)$、$B(0，-4)$、$C(-2，4)$，求過此三點的二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將 $A(-1，2)$、$B(0，-4)$、$C(-2，4)$三點代入方程式中得：

$$\begin{cases} 2=a-b+c \\ -4=c \\ 4=4a-2b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-8 \\ c=-4 \end{cases}$$

所以，此二次函數為 $y=-2x^2-8x-4$ 。

【練習】：已知某二次函數之對稱軸 $x=3$，且其圖形通過 $A(3，2)$、$B(5，6)$兩點，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=a(x-3)^2+k$

將 $A$ 、$B$ 兩點代入方程式中得 $\begin{cases} 2=0+k \\ 6=4a+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=2 \end{cases}$

所以，此二次函數為 $y=(x-3)^2+2$ 。

【練習】：已知某二次函數之頂點為$(-2，-6)$，且其圖形通過 $A(-5，0)$，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=a(x+2)^2-6$

將 $A(-5，0)$代入方程式中得 $0=a(-5+2)^2-6 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

所以，此二次函數為 $y=\frac{2}{3}(x+2)^2-6$ 。

**【練習】**：已知某二次函數其圖形通過 $A(1，0)$、$B(-1，-4)$、$C(4，-39)$，求此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將 $A(1，0)$、$B(-1，-4)$、$C(4，-39)$三點代入方程式中得

$$\begin{cases} 0=a+b+c \\ -4=a-b+c \\ -39=16a+4b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

所以，此二次函數為 $y=-3x^2+2x+1$。

Ⅲ. <u>圖形的應用</u>：有時，在實際狀況中我們也可能用到二次函數的最大值與最小值，由以下的範例更可了解二次函數在日常生活的重要性。

**【範例】**：某人想用一條 100 公尺的繩子圍成一個矩形的停車場，請問如何才能圍出最大面積的停車場？並求出此面積。

解：

設停車場的某一邊長為 $x$ 公尺，因此另一邊長為$(50-x)$公尺。

我們並以 $y$ 平方公尺來表示此停車場的面積。

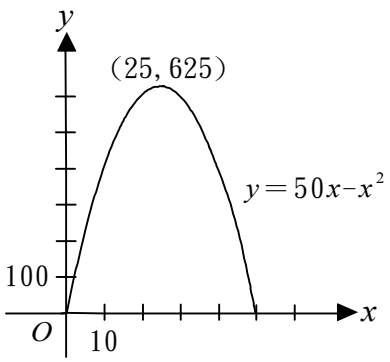
依題意可列式：
$$\begin{aligned} y &= x(50-x) \\ &= 50x-x^2 \\ &= -(x-25)^2+625 \end{aligned}$$

因為停車場的邊長必為正數，所以 $x>0$ 且 $50-x>0$，

即 $x$ 值範圍為 $0<x<50$。

由上可知 當 $x=25$ 時，停車場面積可為成最大的 625 平方公尺

即當此停車場為正方形時，所圍成的面積最大，且其值為 625 平方公尺，並從圖形我們得知 $y$ 值的範圍為 $0<y\leq 625$。



**【範例】**：如何把 30 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？

解：設某一數為 $x$，因此另一數為 $(30-x)$。

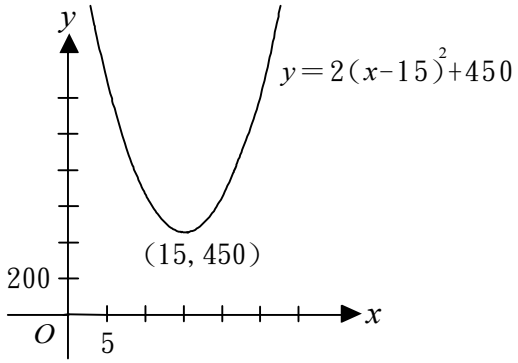
我們並以 $y$ 來表示這兩數的平方和。

依題意可列式：

$$\begin{aligned} y &= x^2+(30-x)^2 \\ &= x^2+900-60x+x^2 \\ &= 2(x-15)^2+450 \end{aligned}$$

由上可知，當一數為 15 而另一數亦為 15 時，

使得這兩數的平方和有最小值為 450。



# 小 試 身 手

【例題 1】

二次函數 $y=x^2+2x-3$ 的圖形交 $x$ 軸於 $A$、$B$ 兩點，交 $y$ 軸於 $C$ 點，求 $\Delta ABC$ 的面積為多少？

解：$y=x^2+2x-3=(x^2+2x+1)-4$

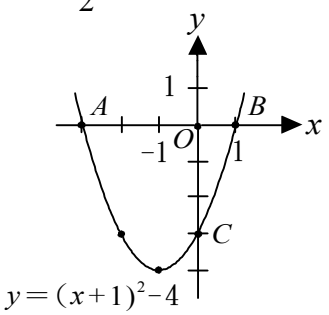
$=(x+1)^2-4$

$(x+1)^2-4=0 \Rightarrow x=-3，1$

$\therefore A(-3，0)\ B(1，0)\ C(0，-3)$

$\therefore \Delta ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 3\times|1-(-3)|$

$=6$




【練習 1】

二次函數 $y=-x^2-2x+15$ 的頂點為 $A$，此函數的圖形與 $x$ 軸交於 $B$、$C$，求 $\Delta ABC$ 的面積為多少？

解：假設此二次函數為

$y=-x^2-2x+15$

$=-(x+1)+16$

$-x^2-2x+15=0 \Rightarrow x=-5，3$

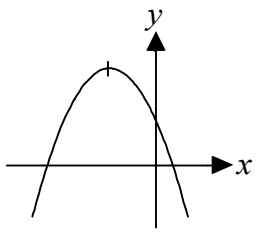
$\therefore A(-1，16)\ B(3，0)\ C(-5，0)$

$\therefore \Delta ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 16\times|3-(-5)|$

$=64$

【例題 2】

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下圖所示，請分別判別 $a$、$b$、$c$ 及 $b^2-4ac$ 的正、負。




解：Θ 圖形開口向下 $\therefore a<0$

Θ 與 $y$ 軸交於正向 $\therefore c>0$

Θ 與 $x$ 軸交於兩點 $\therefore b^2-4ac>0$

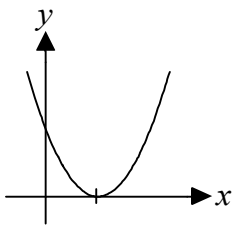
Θ 頂點橫坐標 $-\frac{b}{2a}$ 與 $x$ 軸的負向

$\therefore -\frac{b}{2a}<0$，但 $a<0$ $\therefore b<0$

答：$a<0$，$b<0$，$c>0$，$b^2-4ac>0$

【練習 2】

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下圖所示，請分別判別 $a$、$b$、$c$ 及 $b^2-4ac$ 的正、負。




解：Θ 圖形開口向上 $\therefore a>0$

Θ 與 $y$ 軸交於正向 $\therefore c>0$

Θ 與 $x$ 軸交於一點 $\therefore b^2-4ac=0$

Θ 頂點落在 $x$ 軸的正向

$\therefore$ 其 $x$ 坐標 $-\frac{b}{2a}>0$ 但 $a<0$ $\therefore b<0$

答：$a>0$，$b<0$，$c>0$，$b^2-4ac=0$

【例題 3】

若二次函數 $y=-2x^2+6x+k$ 的圖形與 $x$ 軸交於兩點，求 $k$ 的範圍為何？

解：Θ 與 $x$ 軸交於兩點

$\therefore$ 判別式 $6^2-4\times(-2)\times k>0$

$\therefore 36+8k>0$ ，$8k>-36$

$\therefore k>-\dfrac{9}{2}$

【練習 3】

若二次函數 $y=(m+1)x^2-4x-1$ 的圖形與 $x$ 軸不相交，求 $m$ 的範圍為何？

解：Θ 與 $x$ 軸不相交

$\therefore$ 判別式 $(-4)^2-4\times(m+1)\times(-1)>0$

$\therefore 16+4m+4<0$ ，$4m>-20$

$\therefore m<-5$

【例題 4】

$y=ax^2+bx+1$ 的圖形之最高點坐標為 (−1，2)，則 $a+b=$？

解：$y=ax^2+bx+1=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+1-\dfrac{b^2}{4a}$

$$\therefore \begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-1 \\ 1-\dfrac{b^2}{4a}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$$

$\therefore a+b=-3$

【練習 4】

$y=ax^2+bx+2$ 的圖形之最高點坐標為 (−1，1)，則 $a-b=$？

解：$y=ax^2+bx+2=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+2-\dfrac{b^2}{4a}$

$$\therefore \begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-1 \\ 2-\dfrac{b^2}{4a}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$\therefore a-b=-1$

【例題 5】

設二次函數通過(0，3)、(1，4)、(2，3)三點，求此二次函數。

解：設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將三點代入得

$$\begin{cases} 3=0+0+c & \wedge \quad (1) \\ 4=a+b+c & \wedge \quad (2) \\ 3=4a+2b+c & \wedge \quad (3) \end{cases}$$

由(1)得 $c=3$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 & \wedge \quad (4) \\ 4a+2b=0 & \wedge \quad (5) \end{cases}$$

由 $(4)\times 2-(5)$ 得 $a=-1 \Rightarrow b=2$

此二次函數為 $y=-x^2+2x+3$

【練習 5】

設二次函數通過(0，8)、(1，12)、(−1，6)三點，求此二次函數。

解：設此二次函數為 $y=ax^2+bx+c$

將三點代入得

$$\begin{cases} 8=0+0+c & \wedge \quad (1) \\ 12=a+b+c & \wedge \quad (2) \\ 6=a-b+c & \wedge \quad (3) \end{cases}$$

由(1)得 $c=8$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 & \wedge \quad (4) \\ a-b=-2 & \wedge \quad (5) \end{cases}$$

由 $(4)+(5)$ 得 $a=1 \Rightarrow b=3$

此二次函數為 $y=x^2+3x+8$

【例題 6】

已知某二次函數之對稱軸為 $x+3=0$，且其圖形通過 $A$(-2，5)、$B$(1，35)，求此二次函數為何？

解：設此二次函數為 $y=a(x+3)^2+k$

將 $A$、$B$ 兩點代入得

$$\begin{cases}5=a\cdot(-2+3)^2+k\\35=a\cdot(1+3)^2+k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5=a+k & \wedge\ (1)\\35=16a+k & \wedge\ (2)\end{cases}$$

由 $(1)-(2)$ 得 $-30=-15a \Rightarrow a=2$

$\Rightarrow k=5-2=3$

此二次函數為 $y=2(x+3)^2+3$

【練習 6】

已知某二次函數之對稱軸為 $x-2=0$，且其圖形通過 $A$(3，4)、$B$(-1，-4)，求此二次函數為何？

解：設此二次函數為 $y=a(x-2)^2+k$

將 $A$、$B$ 兩點代入得

$$\begin{cases}4=a\cdot(3-2)^2+k\\-4=a\cdot(-1-2)^2+k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4=a+k & \wedge\ (1)\\-4=9a+k & \wedge\ (2)\end{cases}$$

由 $(1)-(2)$ 得 $8=-8a \Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow k=4-(-1)=4+1=5$

此二次函數為 $y=-(x-2)^2+5$

【例題 7】

已知某二次函數之頂點為(1，1)，且其圖形通過 $A$(3，5)，則此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=a(x-1)^2+1$

將 $A$ 點代入得 $5=a\times(3-1)^2+1$

$\Rightarrow a=1$

所以此二次函數為 $y=(x-1)^2+1$

【練習 7】

已知某二次函數之頂點為(3，-4)，且其圖形通過 $A$(2，-2)，則此二次函數為何？

解：假設此二次函數為 $y=a(x-3)^2-4$

將 $A$ 點代入得 $-2=a\times(2-3)^2-4$

$\Rightarrow a=2$

所以此二次函數為 $y=2(x-3)^2-4$