

一元二次方程式

【十字交乘法解一元二次方程式】：

若解一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 a 、 b 、 c 皆不為 0。

【範例】： $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0$ ， $\therefore x = -2, -3$ 。

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) = 0, \therefore x = -2, 3.$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) = 0, \therefore x = 2, -5.$$

【範例】：解方程式： $x^2 + 6x + 8 = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} : \quad & x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+4) = 0 \\ & \therefore x = -2 \text{ 或 } -4. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x \diagup +2 \\ x \diagdown +4 \\ \hline 2x + 4x = 6x \end{array}$$

【配方法解一元二次方程式】：

利用配方法解 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 $a b c$ 均為常數，且 $a > 0$ 。

解：1. 將 x^2 的係數化為 1，並將常數項移到等號右邊：

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

2. 等號的兩邊各加上 x 項係數一半的平方：

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

3. 等號左邊寫成完全平方，等號右邊合併化簡：

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

4. 等號兩邊開平方，移項化簡求出解：

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

所以一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解為：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}，\text{ 其中 } a b c \text{ 均為常數，且 } a > 0.$$

【範例】：利用配方法解 $x^2 + 8x + 7 = 0$ 。

解：1. 將 x^2 的係數化為 1，並將常數項移到等號右邊：

$$x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x = -7$$

2. 等號的兩邊各加上 x 項係數一半的平方：

$$x^2 + 8x = -7 \Rightarrow x^2 + 8x + (\frac{8}{2})^2 = -7 + (\frac{8}{2})^2$$

3. 等號左邊寫成完全平方，等號右邊合併化簡：

$$x^2 + 8x + (4)^2 = -7 + (4)^2 \Rightarrow (x+4)^2 = 9$$

4. 等號兩邊開平方，移項化簡求出解：

$$(x+4)^2 = 9 \Rightarrow x+4 = \pm 3 \Rightarrow x = -7 \text{ 或 } -1$$

【公式解法解一元二次方程式】：

(1) 利用配方法導出一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，且 $a > 0$ 的解為： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

(i) 若 $b^2 - 4ac > 0$ ，則此方程式的兩根為 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

【範例】：用公式法解方程式： $x^2 - 6x - 3 = 0$ 。

解 $\because b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 36 + 12 = 48 > 0$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

答：此方程式的兩根為 $3 \pm 2\sqrt{3}$ 。

(ii) 若 $b^2 - 4ac = 0$ ，則 $x = \frac{-b + 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$ ，則此方程式的兩根為重根。

【範例】：解方程式： $4x^2 - 4x + 1 = 0$

解 $\because b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$ ，則此方程式的兩根為重根。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 16}}{2 \times 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

\therefore 此方程式的兩根為 $\frac{1}{2}$ (重根)

(iii) 若 $b^2 - 4ac < 0$ ，則此方程式無實數解。

【範例】： $x^2 - x + 3 = 0$

解 $\because b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -11 < 0$ ，則此方程式無實數解。

讓我們用配方法檢驗看看：

$$\begin{aligned} x^2 - x + 3 &= 0 \Rightarrow x^2 - x = -3 \Rightarrow x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -3 + \frac{1}{4} = -2\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 的值一定為正數 \therefore 此方程式無實數解。

(2)判別式與根的性質：

1. 若 $D=b^2-4ac>0$ ，則此方程式有兩相異實根，也就是方程式的兩根不相等。

【範例】：解方程式： $x^2+10x-30=0$ 。

解 \because 判別式 $D=b^2-4ac=10^2-4\times 1\times (-30)=100+120=220>0$

\therefore 此方程式解為兩相異實根。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(10) \pm \sqrt{100 + 120}}{2 \times 1} = \frac{-10 \pm 4\sqrt{55}}{2} = -5 \pm \sqrt{55}$$

\therefore 此方程式有兩相異實根， $x=-5+\sqrt{55}$ 或 $-5-\sqrt{55}$ 。

2. 若 $D=b^2-4ac=0$ ，則此方程式有兩相等實根，也就是方程式的兩根相等。

【範例】：解方程式： $x^2-4x+4=0$ 。

解 \because 判別式 $D=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times 4=16-16=0$

\therefore 此方程式解為兩相等實根(重根)。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-16}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$$

\therefore 此方程式有兩相等實根， $x=2$ (重根)。

3. 若 $D=b^2-4ac<0$ ，則原方程式無實數解(或無實根)。

【範例】：解方程式： $x^2+2x+6=0$ 。

解 \because 判別式 $D=b^2-4ac=2^2-4\times 1\times 6=4-24=-20<0$

\therefore 此方程式無實數解。

$$\begin{aligned} x^2+2x+6=0 &\Rightarrow x^2+2x=-6 \Rightarrow x^2+2x+1=-6+1 \\ &\Rightarrow (x+1)^2=-5 \text{ (負不合)} \quad \therefore \text{此方程式無實根(無解).} \end{aligned}$$

【根與係數】：

若一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之解為 p 、 q ，則有 (1) $p+q=-\frac{b}{a}$ ；(2) $pq=\frac{c}{a}$ 。

例如： $x^2-3x-10=0$ 之解為 5、-2，則

$$(1) p+q=5+(-2)=3=-\frac{(-3)}{1} \text{ 且 } (2) pq=5\times(-2)=-10=\frac{(-10)}{1}$$

【範例】：若 a ， b ， c 和 d 均不為零，且已知 c ， d 為 $x^2+ax+b=0$ 的解而 a ， b 為 $x^2+cx+d=0$ 的解，則 $a+b+c+d$ 為何？

解 \because 根據“根與係數”的關係得知

$$b=cd \text{ 且 } d=ab \text{ 和 } -a=c+d \text{ 且 } -c=a+b \Rightarrow a+b+c=0=a+c+b \Rightarrow b=d$$

$$\text{但 } b=cd \text{ 和 } d=ab \text{，故 } a=c=1 \Rightarrow b=d=-2 \text{，} \therefore a+b+c+d=1-2+1-2=-2$$

1. 華生解一題一元二次方程式： $2x^2 - x - 1 = x^2 + 4x - 5$ 步驟如下：

第一步驟： $(2x+1)(x-1) = (x+5)(x-1)$

第二步驟：等號兩邊同除以 $(x-1)$ 得： $2x+1 = x+5$

第三步驟：等號兩邊同減 1 得： $2x = x+4$

第四步驟：等號兩邊同減 x 得： $x=4$

可是老師告訴華生 $x=1$ 代入方程式 $2x^2 - x - 1 = x^2 + 4x - 5$ 也可以使得等號兩邊相等，
請問華生在哪一步驟開始發生錯誤？

【90 年模擬題本二】

- (A) 第一步驟 (B) 第二步驟 (C) 第三步驟 (D) 第四步驟

重點：等量公理

第二步驟等號兩邊同除以 $(x-1)$ ，需要 $x-1 \neq 0$

答案選 (B)

2. 下列何者可為方程式 $91x^2 - 53x + 6 = 0$ 的解？

【90 年第一次】

- (A) $-\frac{2}{7}$ (B) $-\frac{2}{13}$ (C) $\frac{2}{13}$ (D) $\frac{3}{13}$

重點：解一元二次方程式

$$91x^2 - 53x + 6 = 0$$

$$(13x-2)(7x-3)=0$$

$$13x-2=0 \text{ 或 } 7x-3=0$$

$$x = \frac{2}{13} \text{ 或 } \frac{3}{7}$$

答案選 (C)

3. 小傑用長為 x 公分的竹筷去量一張長方形的紙，發現紙的長度比竹筷的兩倍長少 1 公分，寬比竹筷長多 2 公分。已知紙的面積為 3000 平方公分，依題意下列哪一個一元二次方程式是正確的？

【90 年第二次】

- (A) $(x-2)(2x+1) = 3000$ (B) $(x+2)(2x-1) + 3000 = 0$
 (C) $2x^2 - 3x = 3002$ (D) $2x^2 + 3x - 3002 = 0$

重點：依題意列一元二次方程式

長為 $(2x-1)$ 公分，寬為 $(x+2)$ 公分， \therefore 面積為 $(2x-1) \times (x+2) = 3000$ 。

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 3000 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 3002 = 0$$

答案選 (D)

4. 對於方程式 $(2x+5)(x+1)=(3x-2)(x+1)$ 根的敘述，下列何者正確？【91年第一次】

- (A) 方程式只有一根，而且這個根是正數
- (B) 方程式有兩根，而且兩根的正、負號相同
- (C) 方程式一根為正數，一根為負數
- (D) 方程式無解

重點：解一元二次方程式

$$(2x+5)(x+1)=(3x-2)(x+1)$$

$$(-x+7)(x+1)=0$$

$$-x+7=0 \text{ 或 } x+1=0$$

$$x = 7 \text{ 或 } -1$$

答案選 (C)

5. 小風想用一個遊戲的方法問出兩位朋友的年齡。他說：「將你的年齡，先減 5，再平方，最後加上 25。所出現的數字將會是你今天的幸運數字喔！」。阿珠說：「我是 89！」，阿花說：「我的是 146！」。若阿珠的年齡是 a ，阿花的年齡是 b ，則 $a+b$ 的值會落在下列哪一個範圍內？【91年第二次】

- (A) $18 \leq a+b < 21$
- (B) $21 \leq a+b < 24$
- (C) $24 \leq a+b < 27$
- (D) $27 \leq a+b < 30$

重點：一元二次方程式的列式與求解

設年齡為 x 時的幸運數字為 $(x-5)^2 + 25$

$$\therefore 89 = (a-5)^2 + 25 \Rightarrow a = 13, 146 = (b-5)^2 + 25 \Rightarrow b = 16 \Rightarrow a+b = 13+16 = 29$$

答案選 (D)

6. 樂樂以配方法解 $2x^2 - bx + a = 0$ ，可得 $x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$ 。求 $a = ?$

- (A) -6
- (B) -3
- (C) 6
- (D) 3

【91年第二次】

重點：由解求原來的一元二次方程式

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow [x - (\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2})][x - (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2})] = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

答案選 (B)

7. 若一元二次方程式 $x^2 - 2x - 323 = 0$ 的兩根為 a 、 b ，且 $a > b$ ，則 $2a + b = ?$

(A) -53 (B) 15 (C) 55 (D) 21

【92 年第二次】

重點：利用十字交乘法解一元二次方程式

$323 = 17 \times 19$ ($323 < 400 = 20 \times 20$ 故要找的因數絕對在 1~20 之間)

$$x^2 - 2x - 323 = 0 \Rightarrow (x-19)(x+17) = 0 \quad \therefore x = 19, -17$$

又兩根為 a 、 b ，且 $a > b$ ， $\therefore a = 19$ ， $b = -17$ ， $2a + b = 2 \times 19 - 17 = 38 - 17 = 21$ 。

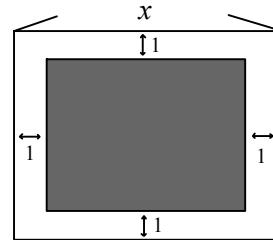
答案選 (D)

8. 如附圖，有一飯店的宴會廳是一個長比寬多 2 公尺的矩形。今在宴會廳中間鋪了一張長方形地毯，使得四周剩下的空地均為 1 公尺寬。已知未鋪地毯的面積是鋪地毯面積的 $\frac{4}{5}$ ，設宴會廳的長是 x 公尺，則下列哪一個式子可以用來表示題目中的數量關係？

(A) $x(x-2) - (x-1)(x-3) = \frac{4}{5}(x-1)(x-3)$

【94 年模擬題本】

(B) $x(x+2) - x(x-2) = \frac{4}{5}x(x-2)$



(C) $x(x-2) - (x-2)(x-4) = \frac{4}{5}(x-2)(x-4)$

(D) $x(x-2) - (x-1)(x-4) = \frac{4}{5}(x-2)(x-4)$

重點：依題意列一元二次方程式

$$\text{鋪地毯面積} = (x-2)(x-2-2) = (x-2)(x-4) ,$$

$$\text{未鋪地毯面積} = x(x-2) - (x-2)(x-4)$$

$$\therefore \text{依題意可列出 } x(x-2) - (x-2)(x-4) = \frac{4}{5}(x-2)(x-4) .$$

答案選 (C)

9. 若 a 、 b 為方程式 $x(3x+7)=0$ 的兩根，且 $a > b$ ，則 $b-a = ?$

【94 年第一次】

(A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $-\frac{7}{3}$ (D) $-\frac{3}{7}$

重點：解一元二次方程式

$$x(3x+7) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } -\frac{7}{3}$$

$$\because a > b, \therefore a = 0, b = -\frac{7}{3} . \therefore b-a = -\frac{7}{3} - 0 = -\frac{7}{3}$$

答案選 (C)

10. 已知 $x^2 - 6x + b = 0$ 可配方成 $(x-a)^2 = 7$ 的型式。請問 $x^2 - 6x + b = 2$ 可配方成哪種型式？

- (A) $(x-a)^2 = 5$ (B) $(x-a)^2 = 9$ (C) $(x-a+2)^2 = 9$ (D) $(x-a+2)^2 = 5$

重點：配方法

【94 年第二次】

$$\because x^2 - 6x + b = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = 7$$

$$\therefore x^2 - 6x + b = 2 \Rightarrow (x-a)^2 = 7 + 2 = 9$$

答案選 (B)

11. 已知 a、b 為方程式 $(\frac{2}{5}x+1)^2 = 680$ 的兩根，且 $a > b$ ，

表(二)

N	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
2	1.414	4.472
5	2.236	7.071
34	5.831	18.439
68	8.246	26.077

利用表(二)，求 $\frac{2}{5}a - \frac{2}{5}b$ 之值最接近下列哪一數？

- (A) 0 (B) 2 (C) 37 (D) 52 【94 年第二次】

重點：解一元二次方程式及查表

$$(\frac{2}{5}x+1)^2 = 680$$

$$\frac{2}{5}x+1 \doteq \pm 26.077$$

$$\frac{2}{5}x \doteq \pm 26.077 - 1$$

$$\frac{2}{5}a \doteq 25.077 \text{ 且 } \frac{2}{5}b \doteq -27.077$$

$$\frac{2}{5}a - \frac{2}{5}b \doteq 25.077 + 27.077 = 52.154$$

答案選 (D)

12. 下列哪一個選項為方程式 $4x^2 - 16x + 15 = 0$ 的兩根？

【95 年第一次】

- (A) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ (B) $\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ (C) $-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$

重點：一元二次方程式的解 \Rightarrow 十字交乘法、公式解法

$$4x^2 - 16x + 15 = 0, x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{8} = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{16 \pm 4}{8} = \frac{5}{2} \text{ 或 } \frac{3}{2}$$

所以其根為 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ (一元二次方程式求解的題目用公式解法最快速)

答案選 (A)

13. 若 a 、 b 為方程式 $(x-29)^2=247$ 的兩根，則下列敘述何者正確？ 【95 年第一次】

- (A) a 為 247 的平方根 (B) $a+b$ 為 247 的平方根
 (C) $a+29$ 為 247 平方根 (D) $29-b$ 為 247 平方根

重點：一元二次方程式的解

$$(a-29)^2=247 \text{ 且 } (b-29)^2=247$$

$$(29-b)^2=247$$

答案選 (D)

14. 已知方程式 $(\frac{x}{3}-1)(x+2)=0$ 的兩根為 a 、 b ，其中 $a > b$ ，則下列哪一個選項是正確的？

- (A) $3a = -6$ (B) $2b = 6$ (C) $a+b = 1$ (D) $a-b = -1$ 【95 年第二次】

重點：一元二次方程式

$$\frac{x}{3}-1=0 \text{ or } x+2=0, x=3 \text{ or } x=-2. \because a > b, \therefore a=3, b=-2.$$

- (A) 選項： $3a=9 \neq -6$ (不合)。 (B) 選項： $2b=-4 \neq 6$ (不合)
 (C) 選項： $a+b=-1$ (D) 選項： $a-b=3-(-2)=5 \neq -1$ (不合)

答案選 (C)

15. 已知方程式 $x^2 - 5625 = 0$ 的兩根為 ± 75 ，則下列何者可為方程式 $x^2 + 6x - 5616 = 0$ 的解？

- (A) $x = 69$ (B) $x = 72$ (C) $x = 77$ (D) $x = 81$ 【95 年第二次】

重點：一元二次方程式配方法、完全平方法

$$x^2 + 6x - 5616 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 5616 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 5616 + 9 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 5625$$

$$\Leftrightarrow x+3 = \pm 75 \Leftrightarrow x+3 = 75 \text{ or } x+3 = -75 \Leftrightarrow x = 72 \text{ or } x = -78$$

答案選 (B)

16. 下列何者為一元二次方程式 $(2x+3)(x+1) = (x+1)(x+3)$ 的解？

- (A) $x=0$ 或 $x=-1$ (B) $x=-1$ 或 $x=-3$ 【96 年第一次】
 (C) $x=-\frac{3}{2}$ 或 $x=-1$ (D) $x=-3$ 或 $x=-\frac{3}{2}$ 或 $x=-1$

重點：解一元二次方程式

$$(2x+3)(x+1) = (x+1)(x+3) \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ 或 } -1$$

答案選 (A)

17. 將一元二次方程式 $x^2 - 6x - 5 = 0$ 化成 $(x+a)^2 = b$ 的型式，則 $b = ?$ 【96 年第一次】

- (A) -4 (B) 4 (C) -14 (D) 14

重點：配方法

【94 年第二次】

$$x^2 - 6x + 9 - 5 = 9 \Rightarrow (x-3)^2 = 9+5=14 \Rightarrow b=14$$

答案選 (D)

18. 若 b 為正數且方程式 $x^2 - x - b = 0$ 的兩根均為整數，則 b 可能為下列哪一數？

- (A) $2 \times 3 \times 5 \times 11$ (B) $2 \times 3 \times 7 \times 11$
 (C) $2 \times 5 \times 7 \times 11$ (D) $3 \times 5 \times 7 \times 11$

【96 年第二次】

重點：十字交乘法解一元二次方程式

$b = 2 \times 3 \times 7 \times 11$ 可以分解成 3×7 和 2×11

答案選 (B)

19. 試求一整數 k 使得 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 沒有實數解，則整數 k 的最小值為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

重點：利用判別式 $D = b^2 - 4ac$ 求解

將二次方程式展開成標準式： $(2k-1)x^2 - 8x + 6 = 0$

可得判別式 $D = 64 - 4 \times (2k-1) \times 6 = 88 - 48k = 8(11 - 6k)$

因為沒有實數解，所以判別式 $D < 0 \Rightarrow 11 - 6k < 0 \Rightarrow k > \frac{11}{6}$

所以符合的最小整數 k 為 2。 答案選 (B)

20. 若 p, q 皆為質數且 $x^2 - px + q = 0$ 有相異正整數根，則下列敘述何者為真？

- I 兩根之差為奇數。 II 至少有一根為質數。
 III $p^2 - q$ 為一質數。 IV $p+q$ 為一質數。 【1975 AMC-12】

- (A) 只有 I 和 II (B) 只有 II 和 III (C) 只有 I 和 II 和 III (D) I 和 II 和 III 和 IV 皆對

重點：一元二次方程式之解的意義

$$\begin{cases} \alpha\beta = q \Rightarrow \alpha = 1, \beta = q \\ \alpha + \beta = p \Rightarrow p = 1 + q \end{cases}$$

又因為 $p = 1 + q$ 亦為質數，故 $q = 2$ 且 $p = 3$ ，所以四句敘述皆對。答案選 (D)

21. 若 $c \in R$ ，今知 $x^2 - 3x + c = 0$ 之一根和 $x^2 + 3x - c = 0$ 之一根互為相反數(即兩數之正負號相反)，則試問 $x^2 - 3x + c = 0$ 之兩根分別為何？ 【1976 AMC-12】

(A) 0 或 3 (B) 0 或 -3 (C) 3 或 -3 (D) 無解

重點：解一元二次方程式

設 $x^2 - 3x + c = 0$ 之一根為 r ，則 $(-r)$ 為 $x^2 + 3x - c = 0$ 之解

$$\therefore r^2 - 3r + c = 0 \quad \wedge \quad (1), \quad r^2 + 3r - c = 0 \quad \wedge \quad (2)$$

由 (1), (2) 得 $2c = 0 \Rightarrow c = 0$ ，則 $x^2 - 3x = 0$ 之兩根為 0 或 3。答案選 (A)

22. 使得方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ 與 $x^2 - x - a = 0$ 有相同實根之 a 值，共有多少個？

(A) 一個 (B) 兩個 (C) 無解 (D) 無限多個

重點：兩個方程式有相同解的運算

兩式相減得 $ax + x + (1 + a) = 0$ ，則 $(a+1)(x+1) = 0 \Rightarrow a = -1$ 或 $x = -1$ 。

如果 $a = -1 \Rightarrow$ 兩式之解不為實根，故矛盾。 $\therefore x = -1 \Rightarrow$ 解得 $a = 2$ ，

所以 a 之值只可能為 2，故只有一種可能。

答案選 (A)

23. 若方程式 $x^2 + px + q = 0$ 的兩根，恰好為 $x^2 + mx + n = 0$ 的兩根的三次方，則試問何者正確？

(A) $p = m^3 + 3mn$ (B) $p = m^3 - 3mn$ (C) $p + q = m^3$ (D) $(\frac{m}{n})^3 = \frac{p}{q}$

重點：利用根與係數求解

設 a, b 為 $x^2 + mx + n = 0$ 的兩根，則 $-m = a + b$ ， $-p = a^3 + b^3$ ， $n = ab$ ， $q = a^3b^3$ 。

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow (-m)^3 = -p + 3 \times n \times (-m) \Rightarrow p = m^3 - 3mn$$

答案選 (B)

24. 設 a, b 為正實數，若方程式 $x^2 + ax + 2b = 0$ 和 $x^2 + 2bx + a = 0$ 都有實根，則 $a + b$ 的最小可能值為何？ 【1984 AMC-12】

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

重點：利用判別式解題

$$D_1 = a^2 - 8b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 8b, D_2 = 4b^2 - 4a \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq a$$

$$\therefore a^4 \geq 64b^2 \geq 64a \Rightarrow a^3 \geq 64, \therefore a \geq 4 \Rightarrow b \geq 2, \therefore a + b \geq 4 + 2 = 6$$

答案選 (D)

25. 滿足 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ ，且 $x, y \in R$ ，則 $\frac{y}{x}$ 最大值為何？

(A) $1 - 2\sqrt{2}$ (B) $2 + 3\sqrt{3}$ (C) $3 + 2\sqrt{2}$ (D) $6 - 4\sqrt{3}$

重點：由判別式求解

假設 $\frac{y}{x} = k$, $y = kx$ 代入， $\therefore (x-3)^2 + (kx-3)^2 = 6 \Rightarrow (k^2 + 1)x^2 - 6(k+1)x + 12 = 0$

$\because x \in R \Rightarrow D = 36(k+1)^2 - 48(k^2 + 1) \geq 0$ ， $\therefore k^2 - 6k + 1 \leq 0 \Rightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq k \leq 3 + 2\sqrt{2}$

所以 $\frac{y}{x}$ 最大值為 $3 + 2\sqrt{2}$

答案選 (C)

26. 一矩形草地，長是 $28m$ ，寬是 $20m$ ，在其內部開闢三條等寬的通路，如附圖所示，使所剩餘草地的面積是 $320m^2$ ，則路寬多少公尺？

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

重點：一元二次的列式與求解

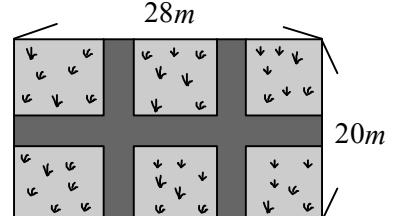
假設路寬為 x 公尺，則依題意可列出 $(28-2x)(20-x) = 320$

$$\Rightarrow 560 - 40x - 28x + 2x^2 = 320$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 68x + 240 = 0 \Rightarrow x^2 - 34x + 120 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-30) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ 或 } 30 \quad (30 \text{ 不合 } \Theta 30m > \text{長是 } 28m)$$

答案選 (B)



27. 黃先生的農地由兩個長方形重疊而成，且重疊部分為正方形，如附圖所示，已知農地總面積為 $1003m^2$ 。若將重疊部分闢成水池，則水池的邊長為多少公尺？

(A) $13m$ (B) $12m$ (C) $11m$ (D) $10m$

重點：一元二次的列式與求解

假設水池邊長為 x 公尺

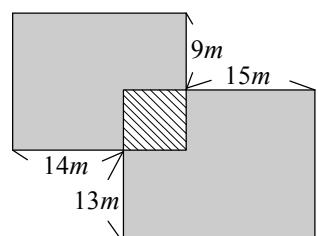
則依題意可列出 $(14+x)(9+x) + (15+x)(13+x) - x^2 = 1003$

$$\Rightarrow 126 + 23x + x^2 + 195 + 28x + x^2 - x^2 = 1003$$

$$\Rightarrow x^2 + 51x - 682 = 0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+62) = 0 \Rightarrow x = 11 \text{ 或 } -62 \quad (\text{負不合})$$

答案選 (C)



28. 已知甲、乙兩正方形邊長比為 $3:2$ ，且甲、乙兩正方形面積和為 325 平方公分，請問甲與乙的周長總和為多少公分？

(A) 80 (B) 100 (C) 120 (D) 140

重點：一元二次方程式應用題

設甲正方形邊長為 $3r$ ，乙正方形邊長為 $2r$ ，則： $9r^2 + 4r^2 = 325$

$$\Leftrightarrow 13r^2 = 325 \Leftrightarrow r^2 = 25 \Leftrightarrow r = \pm 5 (-5 \text{ 不合}),$$

\therefore 甲邊長為 $3 \times 5 = 15$ ，乙邊長為 $2 \times 5 = 10$ 。

則甲與乙的周長總和 $= 4 \times 15 + 4 \times 10 = 60 + 40 = 100$

答案選 (B)

29. 兩整數的差為 13，積為 -42，則兩數之和為多少？

(A) -4 或 4 (B) -3 或 3 (C) -2 或 2 (D) -1 或 1

重點：一元二次方程式的應用問題

設兩數為 x 、 $13+x$ ，則：

$$x(13+x) = -42 \Rightarrow 13x + x^2 = -42 \Rightarrow (x+7)(x+6) = 0$$

$\Rightarrow x = -7$ 或 $-6 \quad \therefore$ 當 $x = -7$ ，另一數為 6； $x = -6$ ，另一數為 7。

$$\therefore -7 + 6 = -1 \text{ 或 } -6 + 7 = 1$$

答案選 (D)

30. 甲、乙兩人同解一個 x^2 係數為 3 的一元二次方程式，甲將一次項係數看錯，解得兩根

為 $-\frac{1}{3}$ ，3；乙將常數項看錯，解得兩根為 -5 ， $-\frac{7}{3}$ ，求原來正確的方程式為何？

(A) $3x^2 - 22x - 3 = 0$ (B) $3x^2 + 22x - 3 = 0$ (C) $3x^2 + 22x + 3 = 0$ (D)

$$3x^2 - 22x + 3 = 0$$

重點：一元二次方程式的應用問題

$$(x-3)(3x+1) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \text{一次項不採用}$$

$$(x+5)(3x+7) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 22x + 35 = 0 \Rightarrow \text{常數項不採用}$$

$$\therefore \text{正確方程式為 } 3x^2 + 22x - 3 = 0$$

答案選 (B)

31. 梯形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ， $2\overline{BC} = 3\overline{AD}$ ， $\overline{AE} = \overline{AD}$ ，若 $\overline{AD} = 2x + 4$ ，若梯形 $ABCD$ 之面積為 125，則 \overline{AD} 之長度為何？
- (A) 5 (B) 7 (C) 10 (D) 12

重點：一元二次方程式的應用問題

$$\begin{aligned}\because 2\overline{BC} &= 3\overline{AD} \text{，且 } \overline{AD} = 2x + 4 \text{，} \therefore 2\overline{BC} = 3(2x + 4) \Rightarrow \overline{BC} = 3x + 6 \\ \therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 之面積} &= \frac{1}{2}[(2x + 4) + (3x + 6)] \times (2x + 4) = 5x^2 + 20x + 20 = 125 \\ \Rightarrow 5x^2 + 20x - 105 &= 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ 或 } -7 \text{ (負不合)} \\ \therefore \overline{AD} &= 2 \times 3 + 4 = 10\end{aligned}$$

答案選 (C)

32. 某電影院每張票價 80 元，觀眾有 1000 人，若票價每減 2 元，則觀眾就增加 30 人，若欲使收入為 79625 元，則每張票價應訂多少？

- (A) 75 (B) 70 (C) 65 (D) 60

重點：一元二次方程式的應用問題

$$\begin{aligned}\text{設票價減少 } 2x \text{ 元，則觀眾就增加 } 30x \text{ 人。} \therefore (80 - 2x)(1000 + 30x) &= 79625 \\ \Rightarrow 80000 + 2400x - 2000x - 60x^2 &= 79625 \Rightarrow 60x^2 - 400x - 375 = 0 \Rightarrow (2x - 15)(6x + 5) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{15}{2} \text{ 或 } -\frac{5}{6} \text{ (不合)} \Rightarrow 80 - 2 \times \frac{15}{2} = 65$$

答案選 (C)

33. 三個連續偶數的平方和是 6356，則此三數和是多少？

- (A) 138 (B) 134 (C) 130 (D) 126

重點：一元二次方程式的應用問題

假設三個連續偶數分別為 $x - 2$ ， x ， $x + 2$

$$\begin{aligned}\text{依題意可列出 } (x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 &= 6356 \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + x^2 + 4x + 4 &= 6356 \\ \Rightarrow 3x^2 + 8 &= 6356 \Rightarrow 3x^2 = 6348 \Rightarrow x^2 = 2116 \Rightarrow x = \pm 46 \text{ (負不合)} \\ \therefore \text{三數的和} &= x - 2 + x + x + 2 = 3x = 3 \times 46 = 138\end{aligned}$$

答案選 (A)

34. 如附圖為一「風車」設計平面圖，其設計來源為四個大小相同的直角三角形拼成的圖形。若 $\overline{AB} = 13$ 、 $\overline{BC} = 7$ ，則此風車的面積為多少？

(A) 110 (B) 120 (C) 130 (D) 140

重點：一元二次方程式的應用問題

設 $\overline{AO} = \overline{CO} = x \Rightarrow \overline{BO} = x - 7$

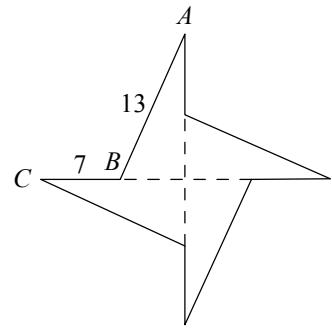
$$x^2 + (x-7)^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 14x + 49 = 169$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 14x - 120 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x-12)(x+5) = 0 \Rightarrow x = 12 \text{ 或 } -5 \text{ (負不合)}$$

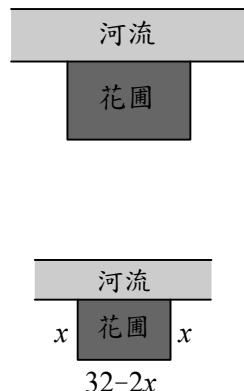
$\because 12 - 7 = 5$ ， \therefore 一個直角三角形面積 $= 12 \times 5 \div 2 = 30$ ，4個共 $30 \times 4 = 120$ 。

答案選 (B)



35. 小翔想用31公尺的籬笆沿著河岸圍一個長方形的花圃，花圃得短邊垂直河岸，緊鄰河岸的一邊不圍，如附圖所示。若要花圃的面積為119平方公尺且花圃形狀愈接近黃金矩形愈好，則此花圃的短邊長為多少公尺？(黃金矩形，長：寬 ≈ 1.62)

(A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{17}{2}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$



重點：一元二次方程式的應用問題

$$x(31 - 2x) = 119 \Rightarrow -2x^2 + 31x - 119 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 31x + 119 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-17)(x-7) = 0 \Rightarrow x = \frac{17}{2} \text{ 或 } 7$$

$$(1) \quad x = \frac{17}{2} \Rightarrow \text{另一邊} 31 - 2 \times \frac{17}{2} = 14, \quad 14 : \frac{17}{2} = 28 : 17 \approx 1.65$$

$$(2) \quad x = 7 \Rightarrow \text{另一邊} 31 - 2 \times 7 = 17, \quad 17 : 7 \approx 2.4$$

答案選 (B)

36. 七個連續正整數由小而大分別為 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g ，且 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2$ ，則 $a = ?$

(A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24

重點：一元二次方程式的應用問題

假設 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g 之值分別為 x 、 $x+1$ 、 $x+2$ 、 $x+3$ 、 $x+4$ 、 $x+5$ 、 $x+6$

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 12x + 36 \\ \Rightarrow & 4x^2 + 12x + 14 = 3x^2 + 30x + 77 \Rightarrow x^2 - 18x - 63 = 0 \\ \Rightarrow & (x-21)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 21 \text{ 或 } -3 (\text{負不合})\end{aligned}$$

答案選 (A)

37. 一工程車的後車輪周長 x 公尺，若前車輪的周長比後車輪的周長少 2 公尺，而且每公里前輪比後輪多轉 25 圈，求後車輪周長？

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

重點：一元二次方程式的應用問題

設後車輪周長為 x 公尺，則前車輪的周長為 $(x-2)$ 公尺

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1000}{x-2} &= \frac{1000}{x} + 25 \Rightarrow 1000x = 1000(x-2) + 25x(x-2) \\ \Rightarrow 1000x &= 1000x - 2000 + 25x^2 - 50x \Rightarrow 25x^2 - 50x - 2000 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \\ \Rightarrow (x-10)(x+8) &= 0, \therefore x = 10 \text{ 或 } -8 (\text{不合}) \Rightarrow \text{後車輪周長為 } 10 \text{ 公尺}\end{aligned}$$

答案選 (C)

38. 設 $a > b > 0$ ，且 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1 = 5$ ，求 $\frac{b}{a} = ?$

- (A) $2 + 3\sqrt{2}$ (B) $2 - 3\sqrt{2}$ (C) $3 + 2\sqrt{2}$ (D) $3 - 2\sqrt{2}$

重點：求解一元二次方程式

$$\begin{aligned}\text{設 } x = \frac{b}{a}, \because x + \frac{1}{x} = 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} &= 3 \pm 2\sqrt{2} \\ \because a > b > 0, \therefore \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow x = 3 - 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

答案選 (D)