因數與倍數

因數、倍數與質數：

(1) **整除**：兩個整數相除，必能得到商及餘數，當餘數為 0 時，稱為整除。

(2) **因數與倍數**：若兩個整數能整除，則稱除數為被除數的因數；被除數為除數的倍數。

【範例】：35÷5＝7…0，5 是 35 的因數，35 是 5 的倍數。

(3) **質數**：一大於 1 的正整數只有 1 及本身兩個正因數時，稱為質數。

【範例】：2 是的正因數只有 1 和 2，所以 2 是質數，也是最小的質數。

(4) **質因數**：是質數又是某數的因數，稱為某數的質因數。

【範例】：5 是 35 的因數，同時 5 也是質數，所以 5 是 35 的質因數。

(5) **標準分解式**：

1. 質因數分解：將一個大的數分解成其質因數的連乘積。
2. 標準分解式：一正整數作質因數分解時將質因數由小至大以連乘式表之，質因數相同者用指數形式簡記，如：$12=2\times2\times3=2^2\times3$（或 $2^2\cdot3$）。

最大公因數：

(1) **公因數與最大公因數**：

一整數甲同為兩個以上整數的因數時，則甲為這些數的公因數。公因數中最大者即稱為最大公因數(Greatest Common Divisor)，最大公因數一定為正整數，簡稱 g.c.d.，可用(a，b)＝d 來表示。

【範例】：求(6，12)＝? 及 (6，12，10)＝?

解　：6 的因數：1、2、3、6 ；

10 的因數： 1、2、5、10；

12 的因數：1、2、3、4、6、12；

故(6，12)＝ 6； (6，12，10)＝ 2 。

(2) **互質**：兩正整數除 1 外，沒有其他公因數者，稱為兩數互質。

【範例】：8 與 9 兩數互質嗎?

解　：8 的因數有 1、2、4、8　；

9 的因數有 1、3、9。

因此，(8，9)＝1，所以 8 與 9 互質。

(3) 最大公因數的求法：

1. 羅列法：將幾個整數的全部因數都寫出來，有相同者即為公因數，再找公因數中的最大者，就是最大公因數。

【範例】：24 的因數有: 1、2、3、4、6、8、12、24。

18 的因數有 1、2、3、6、9、18。

所以 24 與 18 的公因數有：1、2、3、6，其中最大的數是 6；所以(24，18)＝6。

2. 質因數分解法：

將每一個自然數做質因數分解，如果它們有共同的質因數時，則在共同的質因數中，取次方較低者相乘就可得出它們的最大公因數。

【範例】：求 56、90 和 294 的最大公因數＝？

解　：先將 56、90 和 294 質因數分解，

$56=2\times2\times2\times7=2^3\times7$，$90=2\times3\times3\times5=2\times3^2\times5$，$294=2\times3\times7\times7=2\times3\times7^2$。

以上三個數中，2 的最低次方為 1 次、 3 的最低次方為 0 次、

7 的最低次方為 0 次，所以（56，90，294）$=2^1\times3^0\times7^0=2$。

3. 短除法：是質因數分解的簡要紀錄。

【範例】：求 48、72 和 108 的最大公因數＝？

解　：由質因數分解可得：$48=2\times2\times3\times4$，$72=2\times2\times3\times6$，$108=2\times2\times3\times9$。

將其寫成如下的形式，

2	48 , 72 ,108
2	24 , 36 , 54
3	12 , 18 , 27
	4 , 6 , 9

所以(48，72，104)＝2×2×3＝12。

4. 輾轉相除法：利用輾轉相除法得到最大公因數。

※注意：【此法適用於當兩數的值都很大時】。

【範例】：(247，589) ＝？

解　：

2	247	589	2
	190	494	
1	57	95	1
	38	57	
最大公因數 (g.c.d) ←	19	38	2
		38	
		0	停止

所以得到（247，589）＝19

(4)**<u>最大公因數的應用</u>**：

【範例】：求$\left(3\times5^3\times7，2\times3\times5\times7，2^2\times3^2\times5\right)$＝？並將答案寫成標準分解式。

解　：$\left(3\times5^3\times7，2\times3\times5\times7，2^2\times3^2\times5\right)$，將 3 個標準分解式中都有出現且次數最低的質因數相乘，即可得：

$\left(3\times5^3\times7，2\times3\times5^2\times7，2^2\times3^2\times5\right)=3\times5$

所以3×5即為所求。

【範例】：將 36 個橘子、48 個芒果、60 個蘋果分裝在幾個禮盒裏，使同一種水果在每一盒裏有一樣多個，問最多可裝幾盒？其中橘子幾個？芒果幾個？蘋果幾個？

解　：

36 ＝ 盒子數 × 橘子個數

48 ＝ 盒子數 × 芒果個數

60 ＝ 盒子數 × 蘋果個數

若要裝最多，盒子數要取最大的數，因此必須求

36、48、60 的最大公因數：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36,48,60 \\ \hline 2 & 18,24,30 \\ \hline 3 & 9,12,15 \\ \hline & 3,\ 4,\ 5 \end{array}$$

所以$\left(36,48,60\right)=2^2\times3=12$，表示可分成 12 盒其中橘子 3 個，芒果 4 個，蘋果 5 個。

答：最多 12 盒，每個盒裏有橘子 3 個，芒果 4 個，蘋果 5 個。

三、**<u>最小公倍數</u>**：

(1)**<u>公倍數</u>**：

一整數乙為兩個以上的整數的倍數時，乙稱為這些數的公倍數。在所有正公倍數中最小者稱為最小公倍數(Least Common Multiple)。簡稱 l.c.m.，可用[a，b]＝d 來表示。

【範例】：求[8，12，15] ＝ ？

解　：8、12 和 15 大於 0 的公倍數有：120、240、360、…等等，其中最小是 120，稱為 8、12 和 15 的最小公倍數;用[8，12，15]表示 8、12 和 15 的最小公倍數，記為[8，12，15]＝120。

(2)**最小公倍數的求法**：

1. 羅列法：將幾個整數大於 0 的倍數分別寫出，直到有相同的數字出現，這些相同的數就是公倍數，而其中最小者就是最小公倍數。

【範例】：求 [12，16]＝？（羅列法）

解　：分別列出 12 及 16 的倍數，如下表：

12 的倍數	12	24	36	㊽	60	72	84	⑨⑥	108
16 的倍數	16	32	㊽	64	80	⑨⑥	112	128	144

由上表，可以清楚地看到，12 和 16 大於 0 的公倍數為：48、96、144……等，其中最小是 48，所以[12，16]＝48。

2. 質因數分解法：

將每一個自然數做質因數分解，然後在共同的質因數中，取次方數較高者，不同的質因數就以原來的次方相乘相乘，就可得出它們的最小公倍數。

【範例】：求 315、600 和 1260 的最小公倍數。

解　：先將 315、600 和 1260 質因數分解

$315=3\times3\times5\times7=3^2\times5\times7$

$600=2\times2\times2\times3\times5\times5=2^3\times3\times5^2$

$1260=2\times2\times3\times3\times5\times7=2^2\times5\times3^2\times7$

以上三個數中，2 的最高次方為 3 次、 3 的最高次方為 2 次、5 的最高次方為 2 次、7 的最高次方為 1 次。

所以（315，600，1260）$=2^3\times3^2\times5^2\times7=12600$。

3. 短除法：求最小公倍數的步驟如下：

(i) 逐次以這幾個數共同的質因數或部分數共同的質因數去除，直到每兩個都互質為止。

(ii) 最小公倍數就是共同的質因數與最後兩兩互質的這些數之乘積。

【範例】：求 [60，90，105]＝？（短除法）

解　：

$$\begin{array}{r|l} 5 & 60,90,105 \\ \hline 3 & 12,18,21 \\ \hline 2 & 4,\ 6,\ 7 \\ \hline & 2,\ 3,\ 7 \end{array}$$

所以[60，90，105]$=5\times3\times2\times2\times3\times7=1260$

(3)<u>最小公倍數的應用</u>：

【範例】：甲數用 8 去除餘 6，用 11 去除餘 9，用 15 去除餘 13，問甲數至少是多少？

解　：甲數＝8 × 商＋6；

甲數＝11 × 商＋9；

甲數＝15 × 商＋13；

所以甲數用 8 去除餘 6，用 11 去除餘 9 及用 15 去除餘 13，表示都不足 2；

甲數＝8 × 商－2；

甲數＝11 × 商－2；

甲數＝15 × 商－2；

因此甲數＋2 為 8、11、15 的公倍數，問甲數至少是多少，

則甲數＋2 為 8、11、15 的最小公倍數：[8，11，15]＝8×11×15＝1320

因為甲數＋2＝1320，所以甲數＝1320－2＝1318

答：甲數為 1318。

【範例】：求$[3\times5^3\times7$，585，$2^2\times3^2\times5]$＝？並將答案寫成標準分解式：

解　：585 寫成標準分解式為$3^2\times5\times13$；所以整個式子可寫成：

$[3\times5^3\times7$，$3^2\times5\times13$，$2^2\times3^2\times5]$，

將 3 個標準分解式中所有已列出且最高次數的質因數相乘，即可得：

$[3\times5^3\times7$，$3^2\times5\times13$，$2^2\times3^2\times5]=2^2\times3^2\times5^3\times7\times13$

所以$[3\times5^3\times7$，585，$2^2\times3^2\times5]=2^2\times3^2\times5^3\times7\times13$。

1. 下列有關質數的敘述，哪一個是正確的？　【90 年模擬題本一】

(A) 2 是偶數，所以 2 不是質數

(B) 67 的正因數只有 1 和 67，所以 67 是質數

(C) 77 的十位數字及個位數字都是質數，所以 77 是質數

(D) 91 不是 2 的倍數，不是 3 的倍數，也不是 5 的倍數，所以 91 是質數

2. 若 108、72、90 三數的最大公因數為 a，最小公倍數為 b，則下列哪一個選項是正確的？【90 年模擬題本一】

(A) $a=36$，$b=2160$　(B) $a=36$，$b=1080$　(C) $a=18$，$b=2160$　(D) $a=18$，$b=1080$

3. 設 $a=2^3\times3^2\times5\times13$，則下列哪一個選項不是 a 的因數？【90 年模擬題本一】

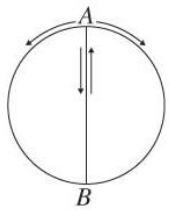
(A) $2^3\times3$　(B) $3\times5\times13$　(C) $2^3\times3\times5^2$　(D) $2\times3\times5\times13$

4. 傳說某古堡有億萬寶藏，必須輸入門密碼才能進入寶庫取寶；已知入門密碼有四碼 $abcd$，分別隱藏在 $2898=2^a\times b^2\times c^1\times23^d$ 的標準分解式中，請問此入門密碼為何？

(A) 2371　(B) 1371　(C) 1351　(D) 2351　【90 年模擬題本二】

5. 如圖，甲車係逆時針方向繞著圓周行駛，每 16 分鐘繞一周；乙車依順時針方向繞著圓周行駛，每 18 分鐘繞一周；丙車沿著直徑 $\overline{AB}$ 來回行駛，每 12 分鐘來回一趟。若甲、乙、丙三車同時由 A 點出發，請問甲、乙、丙三車在幾分鐘以後，會在 A 點第一次同時相遇？

(A) 144　(B) 432　(C) 864　(D) 3456　【90 年模擬題本二】



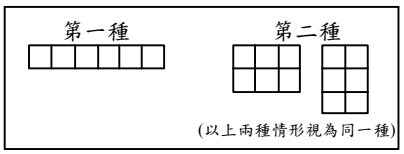
6. a是一個正整數，其所有正因數有 1、2、4、7、14、28。則a與 210 的最大公因數為何？
(A) 4　(B) 7　(C) 14　(D) 28　【90 年第一次基測】

7. 欲將n個邊長為 1 的小正方形，拼成一個長、寬皆大於 1 的矩形，且不會剩下任何小正方形，則n不可能為下列哪一個數？【90 年第一次基測】
(A) 81　(B) 85　(C) 87　(D) 89

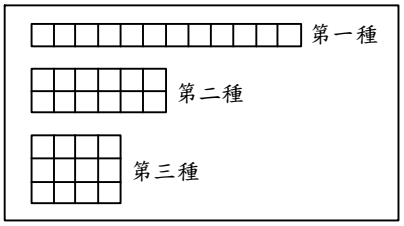
8. 某生將一正整數a分解成質因數相乘，計算過程如右。則下列哪一個選項是正確的？【90 年第二次基測】
(A) $b=2^2\times3^2\times5^2\times7$　(B) $c=3^2\times5^2\times7$　(C) $e=3^2\times5^2\times7$　(D) $f=5\times7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & a \\ \hline 2 & b \\ \hline 2 & c \\ \hline 3 & d \\ \hline 3 & e \\ \hline 5 & f \\ \hline 5 & g \\ \hline & 7 \end{array}$$

9. 大小相同的正方形紙牌若干張，可以緊密地排出不同形狀的長方形。若拿 6 張，可排出兩種形狀，如圖(十二)；若拿 12 張，可排出三種形狀，如圖(十三)。如果拿 36 張紙牌，最多可以排出幾種不同形狀的長方形？
(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 9 。【91 年第一次基測】



圖(十二)



圖(十三)

10. 大方拿了一張長 80 公分，寬 50 公分的紙張，剛好剪出 n 個正方形(其面積大小可以不相同)。請問 n 的最小值是多少？ 【91 年第二次基測】

(A)3 (B)5 (C)10 (D)40

11. 小琪將 a、b 兩個正整數作質因數分解，完整的作法如右。已知 a>b，e 是質數，且 a、b 的最大公因數是 14，最小公倍數是 98，則下列哪一個關係是正確的？

(A) $d>e$ (B) $e>f$ (C) $e>g$ (D) $f>d$ 【91 年第二次基測】

$$\begin{array}{r|cc} 2 & a & b \\ \hline e & c & d \\ \hline & f & g \end{array}$$

12. 若 45 可分解為 $a\times b$，其中 a 、b 均為正整數，則下列哪一個不可能是 $a+b$ 的值？

(A) 46 (B) 42 (C) 18 (D) 14 。 【92 年第二次基測】

13. 下列四個數中，哪一個與 55 互質？ 【93 年第一次基測】

(A) 21 (B) 30 (C) 35 (D) 77

14. 若整數 a 的所有正因數 1、2、4、13、26、52，整數 b 的所有正因數為 1、2、3、6、13、26、39、78，則下列哪一個數是 a 與 b 的最大公因數？ 【94 年模擬題本】

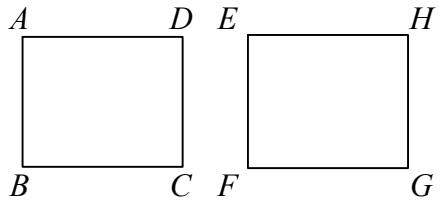
(A)1 (B)26 (C)52 (D)78

15. 設「$a \oplus b$」代表大於 a 且小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10 \oplus 15 = 2$。若 $30 \oplus c = 2$，則 c 可能為下列哪 一個數？

(A) 38 (B) 42 (C) 46 (D) 50 【94 年第一次基測】

16. 將 182 個面積為 1 的正方形，分別緊密地拼成面積為 84 與 98 的兩長方形 $ABCD$ 與 $EFGH$。若 $\overline{AB} = \overline{EF}$ 且 $\overline{EF} > 10$，則 $\overline{AB} =$？ 【94 年第一次基測】

(A) 12 (B) 14 (C) 17 (D) 21 。



17. 小華利用自己的生日設計一個四位數的密碼，方法是：分別將月分與日期寫成兩個質數的和，再將此四個質數相乘，所得數字即為密碼（ 例如：生日若為 8 月 24 日，將 8 寫成 3 和 5 的和，24 寫成 11 與 13 的和，再將 3、5、11、13 相乘得密碼為 2145 ）。已知小華的密碼為 2030，求小華出生在幾月分？ 【94 年第二次基測】

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 12 。

18. 將 231192 做質因數解後可得 $2^a \times 3^2 \times c^2 \times 19$，求 $a+c=$？ 【95 年第一次基測】

（A）10 （B）14 （C）16 （D）20 。

19. 下列哪一選項中的兩數互質？ 【95 年第二次基測】

(A) 14、35 (B) 20、21 (C) 22、33 (D) 42、51

20. 小娟想用 60 塊邊長為 1 的正方形紙板，緊密地拼湊成面積為 60 的長方形，則此長方形的周長最小可為多少？ 【95 年第二次基測】

(A) 30 (B) 32 (C) 45 (D) 60 。

21. 有 30 張分別標示 1～30 號的紙牌。先將號碼數為 3 的倍數的紙牌拿掉，然後從剩下的紙牌中，拿掉號碼數為 2 的倍數的紙牌。若將最後剩下的紙牌，依號碼數由小到大排列，則第 5 張紙牌的號碼為何？ 【96 年第一次基測】

(A) 7 (B) 11 (C) 13 (D) 17

22. 下列四個數，哪一個不是質數？ 【96 年第一次基測】

(A) 41 (B) 61 (C) 71 (D) 91

23. 將正整數 N 的所有正因數由小至大排列如下：

1 ,a ,3 ,b ,c ,d ,e ,f ,g ,42 ,h ,N

判斷下列敘述何者正確？ 【96 年第二次基測】

(A) d 是 a 的 3 倍 (B) e 是 3 的 3 倍 (C) f 是 b 的 3 倍 (D) 42 是 d 的 3 倍

24. 妙妙買進了 126 個茶杯，平均分裝於若干個盒子內。若每個盒子內的茶杯數均為 x，則 x 不可能為下列哪一數？ 【96 年第二次基測】

(A) 3 (B) 7 (C) 9 (D) 11

25. 以下何者是 $2^2\times3\times7^2$ 和 $2^3\times3\times5^2$ 的最大公因數？ 【93 中山國中】

(A) $2^3\times3$ (B) $2^2\times3$ (C) $2^3\times3\times5^2\times7^2$ (D) $2\times3\times5\times7$。

26. 三個分數$\frac{5}{24}$、$\frac{13}{45}$、$\frac{32}{105}$分別乘上同一個正分數之後，都變成整數，下列何者可能為這個正分數？

(A) $\frac{(24,45,105)}{[5,13,32]}$ (B) $\frac{[24,45,105]}{[5,13,32]}$ (C) $\frac{(24,45,105)}{[5,13,32]}$ (D) $\frac{[24,45,105]}{(5,13,32)}$

27. 乘積 a＝2×4×6×……×38×40，則 a 的質因數有幾個？

(A) 0 個 (B) 8 個 (C) 10 個 (D) 16 個