一元一次不等式

一、 一元一次不等式：

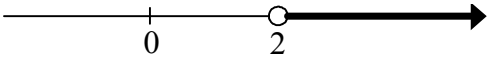
若 $ax+b<0$，且 $a\neq 0$，則稱 $ax+b<0$ 為一元一次不等式。

（一元一次式中若含有不等號“<”、“>”、“≤”、“≥”時，稱為一元一次不等次。）

二、 一元一次不等式的解：

『凡是使得一元一次不等式成立的數，都是這個不等式的解。』

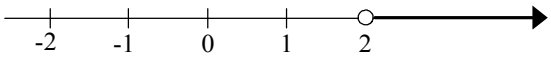
【範例】： $x>2$ 表示數線上所有大於 2 的點。



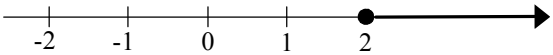
三、在數線上可以用圖來表示不等式的解：

如果我們要表示不等式的解的時候，也可以用數線來表示，例如當我們想表示大於-2，小於 2 的時候，應該如何表示呢？

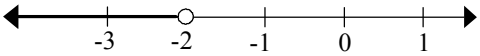
【範例】：所有大於 2 不等於 2 的數，記為 $x>2$。



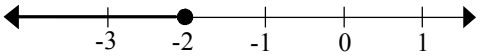
【範例】：所有大於 2 或等於 2 的數，記為 $x\geq 2$。



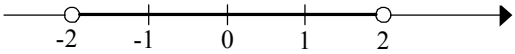
【範例】：所有小於－2 不等於－2 的數，記為 $x<-2$。



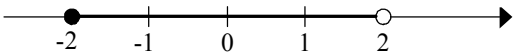
【範例】：所有小於－2 或等於－2 的數，記為 $x\leq -2$。



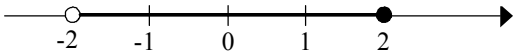
【範例】：所有大於－2 且小於 2 的數，記為 $-2<x<2$。



【範例】：所有大於等於－2 且小於 2 的數，記為 $-2\leq x<2$。



【範例】：所有大於－2 且小於等於 2 的數，記為 $-2<x\leq 2$。



四、 解一元一次不等式的方法：

1. 解不等式 $ax+b>c$ ：

(1)當 $a>0$，則： 原式 $\Leftrightarrow$ $ax>c-b$ $\Leftrightarrow$ $x>\dfrac{c-b}{a}$

(2)當 $a<0$，則： 原式 $\Leftrightarrow$ $ax>c-b$ $\Leftrightarrow$ $x<\dfrac{c-b}{a}$

2. 解不等式 $ax+b\geq cx+d$ **：**

原式 $\Leftrightarrow$ $ax-bx \geq d-c$

$\Leftrightarrow$ $(a-b)x \geq d-c$

$\Leftrightarrow$ $x \geq \dfrac{d-c}{a-b}$ （注意：若 $a-b<0$，則 $x\leq\dfrac{d-c}{a-b}$ 。）

五、 <u>解有絕對值的不等式的方法</u>：

含有絕對值符號的不等式都可改寫成不含絕對值符號的不等式。

(1) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$。

(2) $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$。

(3) $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$。

(4) $|x|\geq a \Leftrightarrow x\geq a$ 或 $x\leq -a$。

(5) $|x-c|<a \Leftrightarrow -a+c<x<a+c$。

(6) $|x-c|\leq a \Leftrightarrow -a+c\leq x\leq a+c$。

(7) $|x-c|>a \Leftrightarrow x>a+c$ 或 $x<-a+c$。

(8) $|x-c|\geq a \Leftrightarrow x\geq a+c$ 或 $x\leq -a+c$。

如果這個新不等式為一元一次式，我們就可用前面提到的方法來解原不等式。

【範例】：解不等式 $|x+1|\geq 3$。

解 ：若 $|x+1|\geq 3$

則 $x\geq 3-1$ 或 $x\leq -3-1$

故 $x\geq 2$ 或 $x\leq -4$

六、<u>將不等式改為含絕對值的不等式</u>：

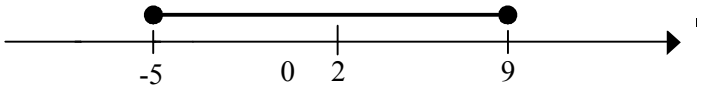
若 $a < x < b$，a 與 b 的距離為 $|b-a|$，則 $|x-c| < \left|\dfrac{b-a}{2}\right|$，

其中 c 為 a 與 b 的中點。

【範例】：將 $-5 < x < 9$ 改為含絕對值的不等式？

解　：-5 與 9 的距離為 $|9-(-5)|=14$，其一半的距離為 7，故其中點為 2。

因此我們有 $|x-2| < 7$



七、<u>應用問題</u>：

學會解不等式後，就可以用來處理相關的問題。一般而言解題步驟為：

1. 適當的假設，並依題意列不等式。
2. 求出所有不等式的共同解（可利用數線圖示求得）。

【範例】：水梨 1 公斤 70 元，蘋果 1 公斤 60 元，小誠家請客，至少需要買 6 公斤的水果，如果小誠的爸爸已經挑選 2 公斤的水梨，在總價不超過 500 元的條件下，爸爸最多可以買到多少公斤的蘋果？最少需要買多少公斤的蘋果？

解　：設爸爸需要買 x 公斤的蓮霧。

依題意可列不等式如下：

$x+2\geq 6$……(1)（至少需要買 6 公斤的水果）

$70\cdot 2+60\cdot x\leq 500$……(2)（總價不超過 500 元）

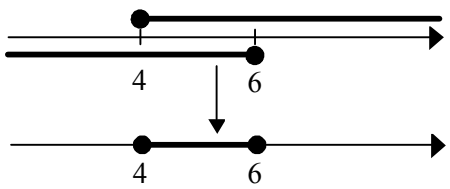
由(1)可得：$x\geq 4$

由(2)可得：$140+60x\leq 500 \Rightarrow 60x\leq 360$

$\Rightarrow x\leq 6$

$\because$ $x\geq 4$ 且 $x\leq 6$ 將兩不等式合併為：$4\leq x\leq 6$

所以爸爸最多可以買 6 公斤的蘋果，最少需要買 4 公斤的蘋果。



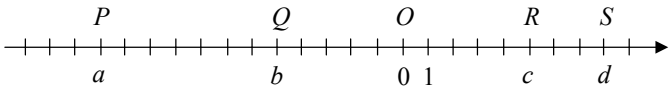
1. 已知第一次段考成績甲班平均成績為 60 分，乙班平均成績為 62 分，若丙班平均成績高於甲班平均成績，但不會低於乙班平均成績，則丙班平均成績可能為下列哪一個分數？【90.題本一】

(A)58 分　(B)60 分　(C)61 分　(D)63 分

2. 在圖(一)的數線上，O 為原點，數線上的點 P、Q、R、S 所表示的數分別為 a、b、c、d。請問下列哪一個大小關係是不正確的？【92 年第一次】

(A) $|a|<|d|$　(B) $|b|=|c|$

(C) $|a|>|b|$　(D) $|0|<|b|$

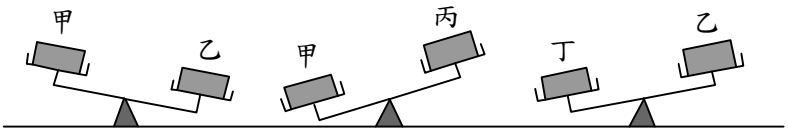


圖(一)

3. 如圖(一)，利用等臂天平比較甲、乙、丙、丁四個物品的重量。請問甲、乙、丙、丁四個物品中哪一個重量最輕？【92 年第二次】

(A) 甲　(B) 乙

(C) 丙　(D) 丁



圖(一)

4. 班上候選人有阿文與其他三位同學，欲選出較高票的兩人參加畫圖比賽。已知總投票數為 31 票且阿文目前得 11 票。下列對阿文的敘述何者正確？【94.題本】

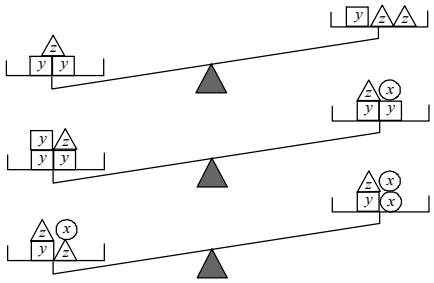
(A) 確定當選 (B) 確定落選

(C) 不能確定當選，因為 11 票未過總數的一半

(D) 不能確定落選，因為不知其他三人的票數

5. 附圖是將積木放再等臂天平上的三種情況。若一個球形、方形、錐形的積木重量分別以 x、y、z 表示，則 x、y、z 的大小關係為何？【94 年第一次】

(A) $x > y > z$ (B) $y > z > x$ (C) $y > x > z$ (D) $z > y > x$



6. 附圖是測量一物體體積的過程：

步驟一，將 300 ml 的水裝進一個容量為 450 ml 的杯子中。

步驟二，將三個相同的玻璃珠放入水中，結果水沒有滿。

步驟三，同樣的玻璃珠再加兩個放入水中，結果水滿溢出。

根據以上過程，推測一顆玻璃珠的體積在下列哪一範圍內？（$1\,ml = 1\,cm^3$）

(A) 30 cm^3 以上，50 cm^3 以下 (B) 50 cm^3 以上，70 cm^3 以下

(C) 70 cm^3 以上，90 cm^3 以下 (D) 90 cm^3 以上，110 cm^3 以下 【94 年第一次】

7. 下列何者為 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y>0$ 的解？　　【94 年第二次】

(A) $x=3$，$y=2$　(B) $x=2$，$y=3$　(C) $x=-3$，$y=-2$　(D) $x=-2$，$y=-3$。

8. 小君帶 200 元到文具行購買每枝 17 元的鉛筆和每枝 30 元的原子筆。若小君買的鉛筆比原子筆多 3 枝，則小君最多可買到幾枝原子筆？【95 年第一次】

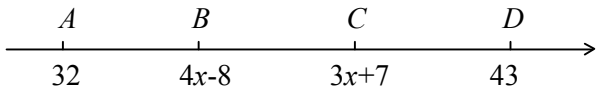
(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

9. $x=-3$ 可為下列哪一個不等式的解？【95 年第一次】

(A) $5\le 4-2x$　(B) $3x+5\ge -1$　(C) $-2x-3\ge 4$　(D) $-3\le -x-8$。

10. 數線上有相異四點 A、B、C、D，分別表示 32、$4x-8$、$3x+7$、43 四個數。若 x 為一正整數，且 A、B、C、D 的相對位置如附圖所示，則 $x=$？　【95 年第二次】

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13



11. 有甲、乙兩個箱子，甲箱重 47 公斤，其重量比乙箱的 3 倍還重，且比乙箱的 4 倍還輕。若乙箱重 x 公斤，依題意可得到下列哪一個關係式？ 【95 年第二次】

(A) $x > \frac{47}{3}$ (B) $x < \frac{47}{4}$ (C) $\frac{47}{4} < x < \frac{47}{3}$ (D) $\frac{47}{3} < x < 47$

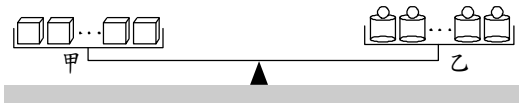
12. 如附圖(一)，等臂天平呈平衡狀態，其中甲秤盤放方塊，乙秤盤放砝碼。若每個方塊、砝碼的重量分別為 x 、 y ，且 $x < y$ ，則經下列哪一選項的操作，可使天平呈附圖(二)的狀態？【95 年第二次】

(A) 在甲加放 6 個方塊，乙加放 6 個砝碼

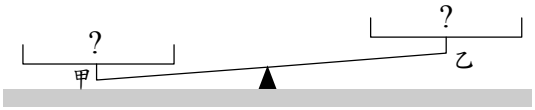
(B) 在甲加放 4 個方塊，乙加放 5 個砝碼

(C) 在甲取出 3 個方塊，乙取出 3 個砝碼

(D) 在甲取出 3 個方塊，乙加放 4 個砝碼



附圖(一)



附圖(二)

13. $x = -1$ 不是下列哪一個不等式的解？ 【96 年第一次】

(A) $2x + 1 \le -3$ (B) $2x - 1 \ge -3$ (C) $-2x + 1 \ge 3$ (D) $-2x - 1 \le 3$

14. 下列何者為不等式 $7-\frac{x}{3}>2$ 的解？ 【96 年第二次】

（A）$x>15$ （B）$x<15$ （C）$x>27$ （D）$x<27$

15. 解不等式 $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{3}x-1$ 之解為何？

(A) $x\le-1$ (B) $x\ge1$ (C) $x\ge2$ (D) $x\ge4$

16. 解不等式 $9\le3x\le x-4$ 的解為何？

(A) $x\ge3$ (B) $x\ge2$ (C) $x\ge1$ (D) 無解

17. 解不等式 $\frac{x}{3}-(x-\frac{5}{2})\le\frac{x+3}{2}$ 的解為何？

(A) $x\le\frac{6}{7}$ (B) $x\le\frac{7}{6}$ (C) $x\ge\frac{6}{7}$ (D) $x\ge\frac{7}{6}$

18. 若有一15層樓的百貨公司，每層樓的高度都在3公尺以上，但未滿4公尺，設百貨公司總樓高為 h 公尺，則h的範圍為多少？

(A) $30 < h \le 45$　(B) $30 \le h \le 45$　(C) $45 \le h < 60$　(D) $45 \le h \le 60$

19. 一梯形上底為$(x+6)$公分，下底為$(2x+3)$公分，若高為 5 公分，此梯形的面積小於 75 平方公分，求 x 的範圍為何？

(A) $-\frac{3}{2} < x < 7$　(B) $-2 < x < 1$　(C) $0 < x < 3$　(D) $2 < x < 6$

20. 有甲、乙兩容器，甲容器內裝有 30 公升的水，乙容器內裝有 9 公升的水。請問最少要從甲容器中取多少公升的水到乙容器中，甲容器內的水才會是乙容器內水的 2 倍以下？

(A) 2 公升　(B) 3 公升　(C) 4 公升　(D) 5 公升

21. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = x+5$，$\overline{BC} = 9+x$，若 $\overline{CA} = 7$，則 x 的範圍為何？

(A) $x > -5$　(B) $x > -\frac{7}{2}$　(C) $x > -3$　(D) $x > -1$

22. 曉惠參加學校園遊會賣冰的攤位，冰棒每枝 10 元，她們一共買了 100 枝，但是在販賣的過程有 10%會融化不能賣錢，如果她們至少想賺 200 元，則每枝冰棒至少要賣多少元？

(A) 13 元　(B) 14 元　(C) 15 元　(D) 16 元

23. 某眼鏡行為了回饋消費者，推出限量 100 支鏡框全面依定價打五折的優惠方案，已知鏡框一支成本為 300 元，且賣出超過 70 支時，即可回收 100 支鏡框的成本，問鏡框的定價可為多少元？

(A) 840 元　(B) 842 元　(C) 844 元　(D) 846 元

24. 設一正 n 邊形的一內角超過 $100°$，則 n 的最小值為何？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

25. 若 $|2x-1| \le 3$，則 x 的範圍為何？

(A) $-1 \le x \le 2$　(B) $0 \le x \le 1$　(C) $0 \le x \le 3$　(D) $2 \le x \le 4$

26. 若滿足不等式：$2 \le |-3x+4| \le 6$，則正整數 x 共有幾個？

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個

27. 某眼鏡行為了回饋消費者，推出限量 100 支鏡框全面依定價打五折的優惠方案，已知鏡框一支成本為 300 元，且賣出超過 70 支時，即可回收 100 支鏡框的成本，問鏡框的定價可為多少元？

(A) 426 元　(B) 427 元　(C) 428 元　(D) 429 元

28. 三角形底邊長（$3x-7$）公分，高 6 公分，若面積小於 48 平方公分，則滿足此條件的整數 x 共有多少個？

(A) 3 個　(B) 4 個　(C) 5 個　(D) 6 個

29. 公益彩券樂透彩的遊戲規則是從 42 個號碼中選出 6 個號碼來簽注，若是 6 個號碼全部猜中即得頭獎。而其各個獎項獎金的分配是將總獎金扣除掉當期的普獎獎金之後，剩餘的錢數再依頭獎、貳獎等不同的比例分配。而所謂的總獎金就是該期的全部投注金額乘上總獎金比例（定為 56%）。那麼如果這次的總獎金不低於 14 億元，那麼該期的全部投注金額範圍最少有多少億元？

(A) 23 億元　(B) 24 億元　(C) 25 億元　(D) 26 億元

30. 某科學館的入場券每張 150 元，但團體票 50 張以上可打九折，每張票只需要 135 元；100 張以上可打八折，每張票只需要 120 元。當一個人數介於 50～100 之間的團體，人數是多少時，購買 100 張團體票反而比較便宜？

(A) 87 人　(B) 89 人　(C) 91 人　(D) 93 人

31. 將不等式 $-5 \le x \le 3$，改寫成 $|x+a| \le b$ 的形式，$(a, b) =$？

(A) $(-1, 2)$　(B) $(3, -2)$　(C) $(2, -3)$　(D) $(1, 4)$

32. 在一個撲滿中，已知裝有 5 元硬幣和 10 元硬幣共 30 個，且總錢數超過 260 元，但未滿 300 元，則 10 元硬幣的數量可能有幾種？

(A) 6 種　(B) 7 種　(C) 8 種　(D) 9 種

33. 有一堆鉛筆分給學生若干人，若每人分 3 枝，則最後 1 人分得 1 枝以上但不到 3 枝；若每人分 4 枝，則恰有 4 人沒有分到，問學生可能為多少人？

(A) 13 人　(B) 15 人　(C) 17 人　(D) 19 人

34. 若 $|ax-b|<4$ 的解為 $1<x<5$，求 $a+b$ 之值為何？

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8