直角座標與二元一次方程式的圖形

一、二元一次方程式的圖形：

二元一次方程式的標準式為 $ax+by=c$，則：

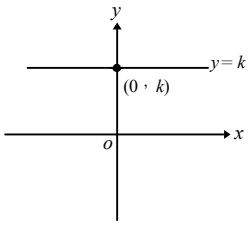
$$ax+by=c \Leftrightarrow by=-ax+c \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

令 $m=-\frac{a}{b}$，$k=\frac{c}{b}$，則原式可改寫為：$y=mx+k$。

稱此式為直線方程式，其中 m 即是直線方程式之斜率。

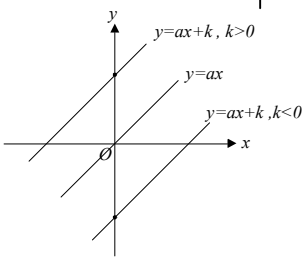
1. $m=0$ 的圖形：

   直線方程式 $m=0$ 的圖形是一條平行 x 軸的水平直線，如右圖所示：



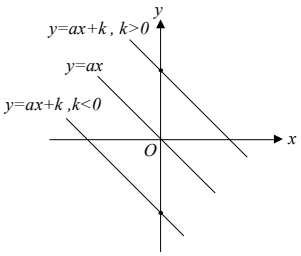
2. $m>0$ 的圖形：

   直線方程式 $y=mx+k$，當 $m>0$ 時為一條由左而右向上傾斜的直線，如右圖：



3. $m<0$ 的圖形：

   直線方程式 $y=mx+k$，當 $m<0$ 時為一條由左而右向下傾斜的直線，如右圖：



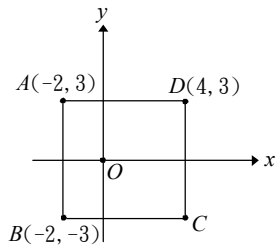
二、二元一次方程式的圖解：

設二元一次方程式為 $\begin{cases} a_1x+b_1=c_1 \\ a_2x+b_2=c_2 \end{cases}$，則：

(1) **兩直線相交**：當 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 時，此聯立方程式有唯一解，且圖形相交於一直線。

(2) **兩直線重合**：當 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 時，此聯立方程式有無限多解，且兩條直線重合。

(3) **兩直線平行**：當 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ 時，此聯立方程式無實數解，且兩條直線平行。



1. 如附圖，四邊形 $ABCD$ 為矩形，已知 A 點坐標為 $(-2,3)$，B 點坐標為 $(-2,-3)$，D 點坐標為 $(4,3)$，則下列四個選項中，何者為直線 BC 的方程式？　【90 年第一次基測】

(A) $y-3=0$　(B) $y+3=0$　(C) $x-1=0$　(D) $x-4=0$

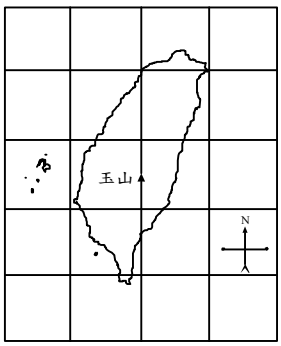
重點：直角坐標與直線

$\because ABCD$ 為矩形，$\therefore C$ 點的橫坐標與 D 點橫坐標相等

而 C 點的縱坐標與 B 點縱坐標相等，故 $C(4，-3)$

故直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為 $y=-3$

答案選（B）



2. 如附圖，<u>玉山</u>在坐標平面上的位置為 $(121, 23.5)$；已知 x 軸的正向指向東方，y 軸的正向指向北方，且每個方程的邊長均為 1 個單位。如果飛機從<u>玉山</u>上空向西飛行 0.5 個單位，再向北飛行 1 個單位，到達 P 點上空，則 P 點最接近下列哪一個位置？

(A) $(121.5, 24.5)$　(B) $(120.5, 24.5)$　(C) $(122, 24)$　(D) $(122, 23)$

重點：直角坐標與直線　【90 年第二次基測】

依題意移動，東、北為正，西、南為負。

$[121+\underbrace{(-0.5)}_{\text{向西}}，23.5+\underbrace{(1)}_{\text{向北}}]=(120.5，24.5)$

答案選（B）

3. 若要坐標平面上的相異三條直線 $L_1: y=2x-4$、$L_2: x=3$、$L_3: ax+2y=16$ 有共同的交點，則 $a=$？　【91 年第一次基測】

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

重點：直線的交點皆滿足其直線方程式

將 L_2 代入 L_1 $\Rightarrow$ $y=2\times3-4=2$，所以有共同交點為 $(3,2)$，並將 $(3,2)$ 代入 L_3

$\Rightarrow$ $3a+2\times2=16$ $\Rightarrow$ $3a=12$ $\Rightarrow$ $a=4$

答案選（C）

4. 已知二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+\dfrac{1}{4}y=9 \\ \dfrac{1}{5}x+y=17 \end{cases}$ 的解為 $x=a$，$y=b$，則 $|a-b|=$？

(A) 1　(B) 11　(C) 13　(D) 16　【91 年第二次基測】

重點：解二元一次聯立方程式

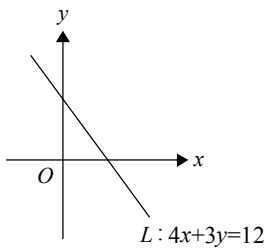
$\begin{cases} x+\dfrac{1}{4}y=35 \quad \wedge \quad (1) \\ \dfrac{1}{5}x+y=17 \quad \wedge \quad (2) \end{cases}$　由 $(1)\times 4$ 與 $(2)\times 5$ 可得 $\begin{cases} 4x+y=36 \quad \wedge \quad (3) \\ x+5y=85 \quad \wedge \quad (4) \end{cases}$

又 $(4)\times 4-(3)$ 可得 $19y=304 \Rightarrow y=16$　代回 (1) 得 $x=5$

$\Rightarrow \begin{cases} x=5=a \\ y=16=b \end{cases} \Rightarrow |a-b|=|5-16|=11$

答案選（B）

5. 如附圖，在坐標平面上，直線 L 的方程式為 $4x+3y=12$，O 為原點，x、y 軸的單位長均為1公分。若 A 點在第四象限且在 L 上，與 y 軸的距離為 24 公分，則 A 點與 x 軸的距離為多少公分？　【92 年第一次基測】

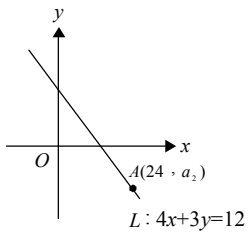


(A) 15　(B) 18　(C) 28　(D) 32

重點：直角坐標與直線

(1) 由第四象限屬性 (+，−)

而與 y 軸距離 24 公分，所以 $A(a_1，a_2)$ 為 $(24，a_2)$，如下圖



(2) 而 $(24，a_2)$ 滿足 $4x+3y=12$ 的關係

即 $4\times 24+3\times a_2=12 \Rightarrow 96+3a_2=12 \Rightarrow 3a_2=12-96$

$\Rightarrow 3a_2=-84 \Rightarrow a_2=-28$（$A$ 點的 y 坐標）

(3) 所以 A 點距離 x 軸為 $|-28|=28$

答案選（C）

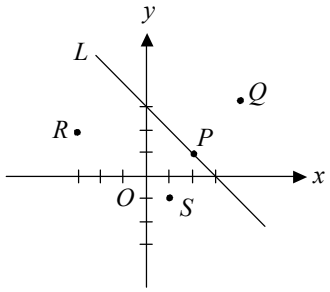
6. 小英的家在坐標平面上的位置為 $P(-2,1)$。x 軸的正向指向東方，y 軸的正向指向北方，如果從小英的家向東走 3 單位，再向南走 4 單位，就到達小華的家，那麼下列哪一個點表示小華家的位置？【92 年第二次基測】

(A) $E(-5,5)$　(B) $F(-5,-3)$　(C) $G(1,5)$　(D) $H(1,-3)$

重點：直角坐標與直線

$(-2，1) \Rightarrow [-2+3，1+(-4)] \Rightarrow (1，-3)$　答案選（D）

7. 如附圖，直線L的方程式為$x+y-3=0$。請問P、Q、R、S，哪一個點的坐標是此方程式的解？【92 年第二次基測】



(A) P　(B) Q　(C) R　(D) S

重點：直角坐標與直線

若要為直線L的方程式之解，則其點必在其直線上

而P點在直線L上，因此P點為此方程式的解

答案選（A）

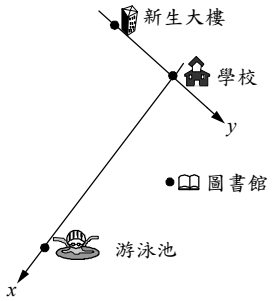
8. 附圖為一平面圖。若以學校為原點作一坐標平面，其中學校到游泳池的方向為x軸的正向，學校到新生大樓的方向為y軸的負向，則圖書館在此平面的第幾象限？【93 年第一次基測】

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四

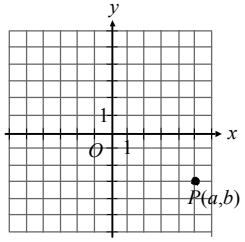
重點：象限的應用與轉換

由右圖可知，圖書館在此平面的第一象限

答案選（A）



9. 如附圖，若坐標平面上P點的坐標為(a, b)，則$a-b=$？【93 年第二次基測】



(A) 8　(B) 2　(C) -2　(D) -8

重點：坐標平面上的位置(點)

$P(a, b)=P(5, -3)$

$a-b=5-(-3)=8$

答案選（A）

10. 坐標平面上，若點（－4，2）在直線$3x+ay=4$上，則$a=$？ 【94 年第一次基測】

(A) -8 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) 8

重點：將點代入直線方程式中求解

將（－4 ,2）代入 $3x+ay=4$

得 $3\times(-4)+a\times2=4$，$-12+2a=4$，$2a=16$，$a=8$

答案選（D）

11. 如圖（九），坐標平面上，A、B兩點均在 x 軸上，$\overline{AB}=3.4567$ 公分，且 y 軸為 $\overline{AB}$ 的中垂線。若在平面上找一點 C，使得 $\overline{AC}=1.5$ 公分、$\overline{BC}=3$ 公分，則 C 點可能在下列何處？

(A) x 軸 (B) y 軸 (C) 第一象限 (D) 第三象限 【94 年第二次基測】

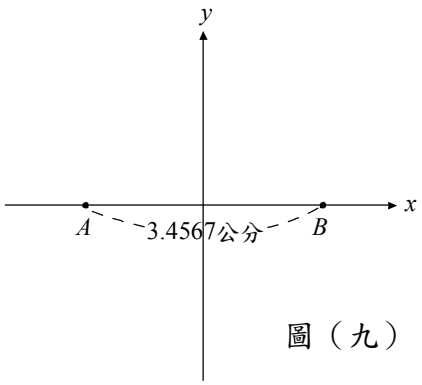
重點：三角形的兩邊和大於第三邊

Θ $\overline{PA}=\overline{PB}$

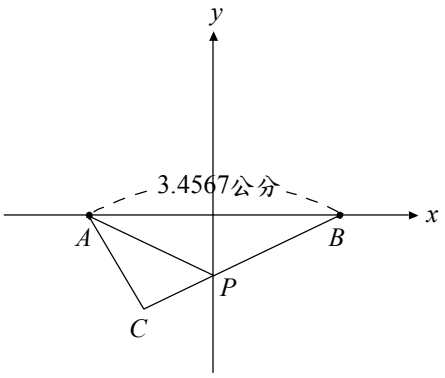
且 $\overline{BC}+\overline{AC}=(\overline{PA}+\overline{PC})-\overline{AC}=\overline{PA}+\overline{PC}-\overline{AC}>0$

$\therefore C$ 點是在第二象限或第三象限

答案選（D）



圖（九）



12. 在坐標平面上，直線 L 的方程式為 $y=-3x+a$。若 $a>0$，則 L 不通過第幾象限？

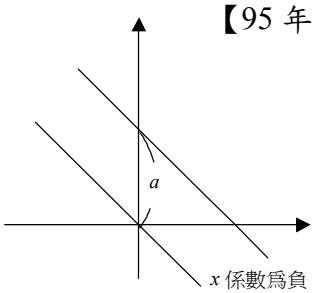
（A）一 （B）二 （C）三 （D）四 【95 年第一次基測】

重點：圖形的平移

$y=-3x+a$, $a>0$

如右圖可知，L 不通過第三象限。

答案選（C）



13. 如圖（五），坐標平面上有 A（$\frac{5}{2}$, 1）、B（$-\frac{5}{3}$, -4）兩點。 【96 年第二次基測】

過 A、B 兩點作直線 L 後，判斷下列哪一點與直線 L 的距離最短？

(A)(3, -1)　(B)(1, 2)　(C)(0, $-\frac{1}{2}$)　(D)(0, -2)

重點：直角座標與函數圖形

設直線 L 的方程式為 $y = ax + b$，通過 A 與 B 兩點

則 $\begin{cases} \frac{5}{2}a + b = 1 \wedge\wedge \ (1) \\ -\frac{5}{3}a + b = -4 \wedge\wedge \ (2) \end{cases}$ 利用加減消去法，將(1)－(2)可得：

$\frac{25}{6}a = 5 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6}{5}$ ， 將 $a = \frac{6}{5}$ 代入(1)，得 $b = -2 \quad \Rightarrow$ 直線 L 方程式為 $y = \frac{6}{5}x - 2$

因（3, -1）、(1, 2）與（0, $-\frac{1}{2}$）都在直線 L 外，只有（0, -2）在直線 L 上

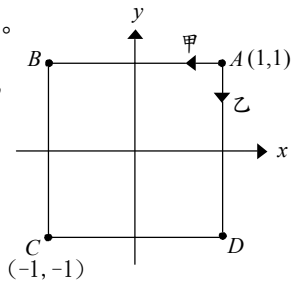
所以（0, -2）與直線 L 的距離最短

答案選（D）

※ 請閱讀下列的敘述後，回答第 19 題和第 20 題

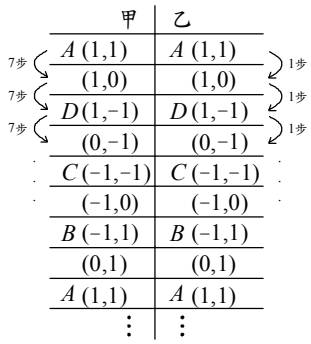
如右圖，坐標平面有一正方形 $ABCD$，A、C 的坐標分別為(1,1)、(-1,-1)。已知甲、乙兩人在 A 點第 1 次相遇後，甲自 A 點方向以每秒 a 公尺的速率，沿著正方形的邊以逆時針方向等速行走；乙自 A 點以每秒 b 公尺的速率，沿著正方形的邊以順時針方向等速行走。

【95 年第二次基測】



14. 若 $a = 7b$，則甲、乙第 2 次相遇在何處？

(A) (1,0)　(B) (0,1)　(C) (0,1)　(D) (−1,1)



重點：平面直角座標綜合性質與推理

甲走 7 步，乙走 1 步，以 A 點為出發點，走一次要 8 步。

甲走 7 步到達(1, 0)，乙走 1 步到達(1, 0)

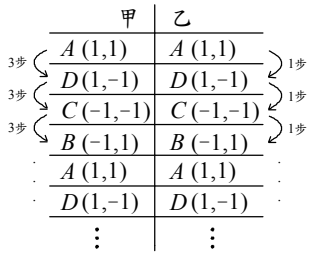
因此甲、乙第 2 次相遇在(1, 0)

答案選（A）

15. 若 $a \neq 7b$，且甲、乙第 2 次相遇在 D 點，則此兩人第 91 次相遇在何處？

(A) A 點　(B) B 點　(C) C 點　(D) D 點

重點：平面直角座標綜合性質與推理



∵甲、乙第 1 次相遇在 A 點且甲、乙第 2 次相遇在 D 點。

∴可推得甲、乙的速率比為 $3:1$

⇒ 甲、乙第 3 次相遇在 C 點　⇒ 甲、乙第 4 次相遇在 B 點

⇒ 甲、乙第 5 次相遇在 A 點　⇒ 甲、乙第 6 次相遇在 D 點

⇒ $91 \div 4 = 22\text{K}\ 3$，因此可知兩人第 91 次相遇在何處 C 點。　答案選（C）

16. 坐標平面上，若點 $(-\frac{3}{2}，4)$ 在直線 $5x - ay = \frac{2}{3}$ 上，則 $a =$？【模擬 94 年第一次基測】

(A) -2　(B) $\frac{37}{6}$　(C) $-\frac{49}{24}$　(D) 3

重點：二元一次方程式的圖形

將 $(-\frac{3}{2}，4)$ 代入 $5x - ay = \frac{2}{3} \Rightarrow 5 \times (-\frac{3}{2}) - a \times 4 = \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{15}{2} - 4a = \frac{2}{3}$

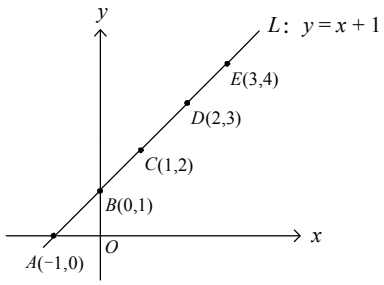
$\Rightarrow 4a = -\frac{15}{2} - \frac{2}{3} = \frac{-45-4}{6} = -\frac{49}{6} \Rightarrow a = -\frac{49}{24}$

答案選（C）

17. 附圖為五個點 A、B、C、D、E 在 $L: y - x = 1$ 的直線方程式之上。今有一點 $P(x, y)$ 亦在直線 L 上且距離 B 點 $\sqrt{2}$ 單位，距離 D 站 $3\sqrt{2}$ 單位，則下列何者表示正確？

（A）$-2.5 < x < -1.5$（B）$-1.5 < x < -0.5$（C）$-0.5 < x < 0.5$（D）$0.5 < x < 1.5$

重點：坐標平面的距離



因為 $L: y = x + 1$

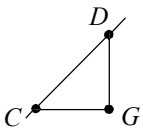
所以若由 B 與 C 的距離為 1，則 x 坐標距離為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，

B 點：P 的 x 坐標可能位置為 $0 \pm \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -1$ 或 1

D 點：P 的 x 坐標可能位置為 $2 \pm 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -1$ 或 5

所以 P 的 x 坐標位置應該是 -1 ⇒ $-1.5 < x < -0.5$

答案選（B）



$\overline{CG} : \overline{DG} : \overline{CD} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

18. 在坐標平面上，已知直線 L 的方程式為 $y=mx+a$ 且 L 不通過第四象限。
則下列何者為真？【模擬 95 年第一次基測】

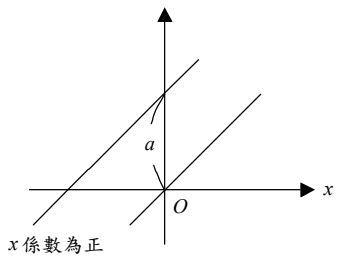
（A）$m<0$，$a<0$（B）$m<0$，$a>0$　（C）$m>0$，$a<0$　（D）$m>0$，$a>0$

重點：圖形的平移

L 不通過第四象限且 L：$y=mx+a$

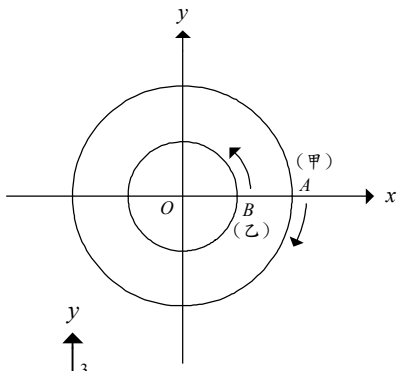
如右圖可知，$m>0$，$a>0$。

答案選（D）



19. 如附圖，A、B 兩點在 x 軸上。今甲、乙兩車分別從 A、B 兩點同時出發，且分別以逆時針與順時針方向分別遶著大、小兩圓周行駛。若甲車每 45 分鐘繞一圈，乙車每 30 分鐘繞一圈，則當乙車剛好繞完第五圈時，甲車位於第幾象限？【模擬 95 年第一次基測】

（A）一　（B）二　（C）三　（D）四



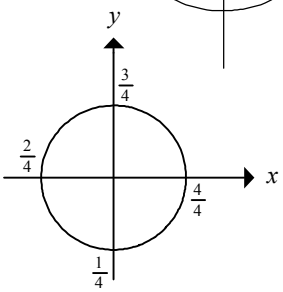
重點：平面直角座標綜合性質與推理

乙車：$30\times5=150$ 分，$\dfrac{150}{45}=\dfrac{10}{3}\fallingdotseq 3..3$（圈）

$0.3=\dfrac{3}{10}=\dfrac{6}{20}$ 又 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{20}$，$\dfrac{2}{4}=\dfrac{10}{20}$，$\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{20}$（如右圖）

$\because \dfrac{5}{20}<\dfrac{6}{20}<\dfrac{10}{20}$，$\therefore$ 甲車在第三象限內。

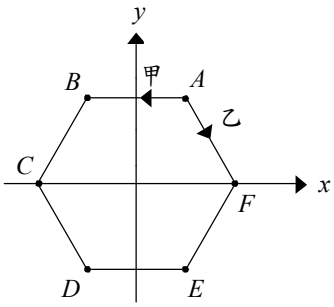
答案選（C）



※ 請閱讀下列的敘述後，回答第 25 題和第 26 題

如附圖，坐標平面有一正六邊形 $ABCDEF$。已知甲、乙兩人在 A 點第 1 次相遇後，甲自 A 點方向以每秒 a 公尺的速率，沿著正六邊形的邊以逆時針方向等速行走；乙自 A 點以每秒 b 公尺的速率，沿著正方形的邊以順時針方向等速行走。

【模擬 95 年第二次基測】



20. 若 $a=3b$，則甲、乙第 3 次相遇在哪一點？

(A) A　(B) B　(C) D　(D) E

重點：平面直角座標綜合性質與推理

甲走 3 步，乙走 1 步，以 A 點為出發點，走一次要 4 步

甲走 9 步到達 D，乙走 3 步到達 D，

因此甲、乙第 2 次相遇在 D。

甲再走 9 步到達 A，乙再走 3 步到達 A，

此甲、乙第 3 次相遇在 A。

答案選（A）

甲	乙	
D	F	
A	E	
D	D	✓
A	C	
D	B	
A	A	✓
D	F	
A	E	
D	D	✓
⋮	⋮	

21. 若 $a \neq 3b$，且甲、乙第 2 次相遇在 F 點，則此兩人第 88 次相遇在何處？

(A) A 點　(B) B 點　(C) C 點　(D) D 點

重點：平面直角座標綜合性質與推理

∵甲、乙第 1 次相遇在 A 點且甲、乙第 2 次相遇在 F 點

∴可推得甲、乙的速率比為 $5:1$

⇒　甲、乙第 3 次相遇在 E 點

⇒　甲、乙第 4 次相遇在 D 點

⇒　甲、乙第 5 次相遇在 C 點

⇒　甲、乙第 6 次相遇在 B 點

⇒　甲、乙第 7 次相遇在 A 點

⇒　甲、乙第 8 次相遇在 F 點

甲	乙
A	A
F	F
E	E
D	D
C	C
B	B
A	A
F	F
E	E
⋮	⋮

5步　5步　5步　1步　1步　1步

甲	乙
A	A
F	F
E	E
D	D
C	C
B	B
A	A
F	F
E	E
⋮	⋮

11步　11步　11步　1步　1步　1步

⇒　$88 \div 6 = 14$ K 4，因此可知兩人第 88 次相遇在何處 D 點

(如右表，甲與乙的速率比也可為 $11:1$、$17:1$、Λ 等)

答案選（D）

22. $(4, a)$、$(-2, b)$ 在直線 $2x-3y=0$ 上，則 (b, a) 在第幾象限？

（A）一　（B）二　（C）三　（D）四。

重點：直角座標系

$(4, a)$ 代入 $\Rightarrow 8-3a=0$，$a=\frac{8}{3}$。　$(-2, b)$ 代入 $\Rightarrow -4-3b=0$，$b=-\frac{4}{3}$。

$(b, a) = (-\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$，∴ (b, a) 在第二象限。

答案選（B）

23. $y=mx-n$ 的函數圖形，通過$(-6，8)$、$(-1，-4)$兩點，則 $m=$？，$n=$？

重點：通過直線圖形的點之幾何意義

$(-6，8)$代入 $\Rightarrow$ $-6m-n=8$……①

$(-1，-4)$代入 $\Rightarrow$ $-m-n=-4$……②

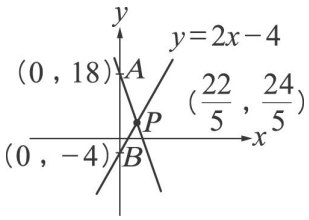
①－② $-5m=12$，$m=-\dfrac{12}{5}$ 代入②

$\dfrac{12}{5}-n=-4$，$n=\dfrac{12}{5}+4=\dfrac{32}{5}$

答：$m=-\dfrac{12}{5}$，$n=\dfrac{32}{5}$。

24. $y=2x-4$，$y=-3x+18$ 兩函數圖形與 y 軸所圍成的三角形面積＝？

重點：直線圖形的應用



$y=2x-4$

x	0	2
y	-4	0

$y=-3x+18$

x	0	6
y	18	0

$\begin{cases} y=2x-4\cdots\cdots① \\ y=-3x+18\cdots\cdots② \end{cases}$，①－② $0=5x-22$，$x=\dfrac{22}{5}$

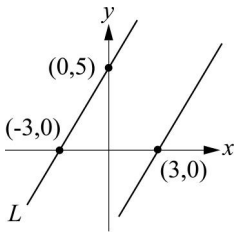
代入 ① ，$y=\dfrac{44}{5}-4=\dfrac{24}{5}$。

$\therefore$ $\triangle PAB$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times|18-(-4)|\times\dfrac{22}{5}=\dfrac{242}{5}$

答：$\dfrac{242}{5}$平方單位。

25. 如附圖，直線 L 平行直線 M，且通過$(0，5)$、$(-3，0)$，直線 M 通過$(3，0)$，求直線 M 的方程式為何？

重點：兩直線平行的幾何意義



設 L 的方程式為 $y=ax+b$，$\therefore$ $(0，5)$代入 $5=b$，

$(-3，0)$ 代入 $0=-3a+b$，$\therefore$ $0=-3a+5$ $\Rightarrow$ $a=\dfrac{5}{3}$ ，

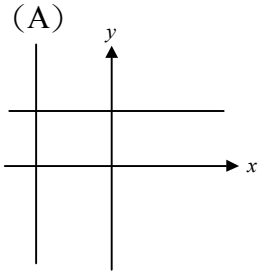
$\therefore$ L 的方程式為 $y=\dfrac{5}{3}x+5$

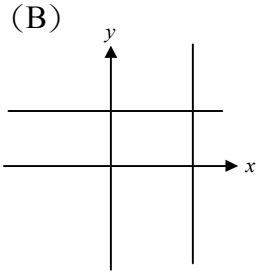
$\because$ 直線 L 平行直線 M ，$\therefore$ 直線 M 的方程式為 $y=\dfrac{5}{3}x+k$，$(3，0)$ 代入 $0=5+k$

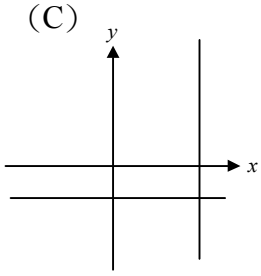
$\therefore$ $k=-5$ ， $\therefore$ 直線 M 的方程式為 $y=\dfrac{5}{3}x-5$

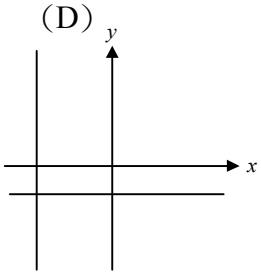
答：直線 M 的方程式為 $y=\dfrac{5}{3}x-5$

26. 下列何者最可能是 $x=4$ 與 $y+2=0$ 在坐標平面上之圖形？

（A）


（B）


（C）


（D）


重點：直線圖形的判別。

$x=4$ 與 $y+2=0$，其交點為(4，－2)落在第四象限，所以選(C)

答案選（C）

27. 若二元一次方程式 $\begin{cases} ax+y=5 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3by=7 \end{cases}$ 有相同的解，請問（ a ，b ）為何？

（A）（2, -1）　（B）（1, -1）　（C）（-2, 3）　（D）（3, 1）

重點：兩直線相交的應用。

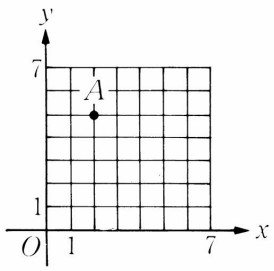
∵ 有相同的解 ∴四個方程式會相交於一點。

解 $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$ ，可得：$x=2$ ，$y=-1$ 代入 $\begin{cases} ax+y=5 \\ 2x-3by=7 \end{cases}$

則 $\begin{cases} 2a-1=5 \\ 4+3b=7 \end{cases}$ ，可得：$a=3$ ，$b=1$ ，所以

答案選（D）

28. 如下圖，是坐標平面上的一個方格圖，圖中線段(縱、橫各 8 條)的交點稱為格子點。A 為給定的格子點，在方格圖中選擇三個格子點 B、C、D，使得四邊形 $ABCD$ 的面積為最大。試問下列哪一條直線與此四邊形 $ABCD$ 的一邊疊合？



(A) $x+y-7=0$　(B) $2x-5y+21=0$

(C) $x-2y+8=0$　(D) $x+2y-12=0$。

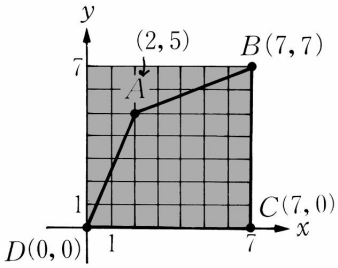
重點：直線方程式的圖形與解的意義。

A、B、C、D 四頂點依序為(2，5)，(7，7)，(7，0)，(0，

四邊形 $ABCD$ 的面積為最大。

直線方程式 $2x-5y+21=0$ 經過 (2，5)，(7，7)

與此四邊形 $ABCD$ 的一邊疊合。



答案選（B）

29. 設點$(-a，ab)$在第四象限，下列四個點 A$(-a，b)$、B$(b^2，ab)$、C$(-b，a)$、D$(a^2，-ab)$，有幾個點在第一象限？

（A）一　（B）二　（C）三　（D）四。

重點：正負號的判別與象限的位置。

因為點$(-a，ab)$在第四象限，

所以 $a<0$，$b>0$ 則：

A$(-a，b)$ $\Rightarrow$ A$(+，+)$ 在第一象限。B$(b^2，ab)$ $\Rightarrow$ B$(+，-)$ 在第四象限。

C$(-b，a)$ $\Rightarrow$ C$(-，-)$ 在第三象限。D$(a^2，-ab)$ $\Rightarrow$ D$(+，+)$ 在第一象限。

答案選（B）

30. 設 a、b 為常數，在坐標平面上，若點$(ab，a+b)$在第四象限內，且直線 L 的方程式為 $ax+by+1=0$，則直線 L 不經過第幾象限？

（A）一　（B）二　（C）三　（D）四。

重點：直線方程式截距的應用。

解：

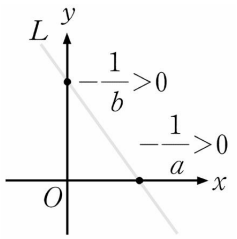
$\because$ $(ab，a+b)$在第四象限

$\Rightarrow$ $ab>0$，$a+b<0$ $\Rightarrow$ $a<0$，$b<0$

因為 $ax+by=-1$，所以

x	$-\frac{1}{a}$	0
y	0	$-\frac{1}{b}$

但$-\frac{1}{a}>0$，$-\frac{1}{b}>0$（因為 $a<0$，$b<0$）



$\therefore$ 圖形(直線 L)不經過第三象限

答案選（C）