平方根與立方根

【平方根】：

(1) 平方根的表示法：

若 $x^2=a$，$a>0$ $\Rightarrow$ $x=\pm\sqrt{a}$，x 稱為 a 的平方根。

(2) 設 a 是實數，則 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a\text{, 當}a>0 \\ -a\text{, 當}a<0 \\ 0\text{, 當}=0 \end{cases}$。

(3) 設 a、b 為實數，則 $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=\begin{cases} a-b & (a\geq b) \\ b-a & (a<b) \end{cases}$。

注意：也就是在此 $x\geqq 0$，則我們有 $\sqrt{x}\geqq 0$。

(4) 平方根常用運算公式：

(i) $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}\quad (c\geq 0)$

(ii) $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}\quad (c\geq 0)$

(iii) $a\sqrt{b}\times c\sqrt{d}=a\times c\sqrt{b\times d}$，($b\geq 0$，$d\geq 0$)

(iiii) $m\sqrt{a}\div n\sqrt{b}=m\sqrt{a}\times\dfrac{1}{n\sqrt{b}}=\dfrac{m\sqrt{a}}{n\sqrt{b}}$，($a\geq 0$，$b>0$，$m$、$n$ 為實數)。

(5) 最簡根式：

一個二次方根，根號內的數，其因數不再含有大於 1 的完全平方數，

且分母不含根號，即無法再進一步化簡，此種方根叫做最簡根式。

例如：$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ 不是最簡根式，$\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ 是最簡根式。

※平方根四則運算的結果務必化為最簡方根。

【範例】：(i) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4\times 2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

(ii) $3\sqrt{12}-2\sqrt{3}=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

(iii) $2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}=2\times 3\sqrt{3\times 2}=6\sqrt{6}$

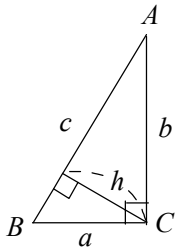
(iiii) $\sqrt{6}\div 2\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{18}}{2\times 3}=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

【商高定理】

(1) 若有一個直角三角形三邊長為 a 、b 、c，其中 c 為斜邊，則：$c^2 = a^2 + b^2$

直角三角形的面積 $= \dfrac{\text{兩股長的乘積}}{2} = \dfrac{a \times b}{2}$ 。

直角三角形斜邊上的高 $= \dfrac{\text{兩股長的乘積}}{\text{斜邊長}} \rightarrow h = \dfrac{a \times b}{c}$ 。



(2) 常見直角三角形的三邊長

3，4，5　；　5，12，13　；　7，24，25　；　8，15，17　；　9，40，41

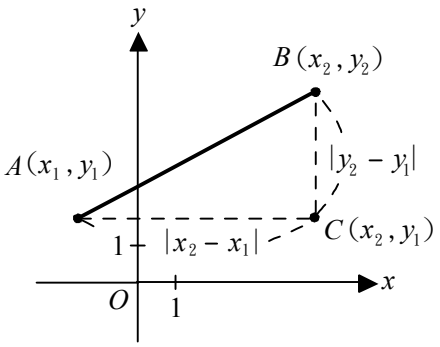
以上的三邊長可同時放大或縮小，例如：3，4，5 可同時放大兩倍為 6，8，10。

【座標平面上兩點的距離公式】：

座標平面上 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，則：

a. $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

b. $\overline{AB}$ 中點座標為 $(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$



【立方根】：

(1) 立方根的表示法：

給一個任意 a，$x^3 = a \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{a}$ 。

(2) 立方根常用運算公式：

(i) $a\sqrt[3]{c} + b\sqrt[3]{c} = (a+b)\sqrt[3]{c}$ (c 為任意實數)。

(ii) $a\sqrt[3]{c} - b\sqrt[3]{c} = (a-b)\sqrt[3]{c}$ (c 為任意實數)。

(iii) $a\sqrt[3]{b} \times c\sqrt[3]{d} = a \times c\sqrt[3]{b \times d}$ (b 、d 為任意實數)。

(iiii) $m\sqrt[3]{a} \div n\sqrt[3]{b} = m\sqrt[3]{a} \times \dfrac{1}{n\sqrt[3]{b}} = \dfrac{m\sqrt[3]{a}}{n\sqrt[3]{b}} = \dfrac{m}{n}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ (a 、b 為任意實數且 $b \neq 0$)

(3) 最簡立方根式：

一個三次方根，根號內的數，其因數不再含有大於 1 的完全立方數，且分母不含立方根號，即無法再進一步化簡，此種立方根叫做最簡立方根式。

例如：$\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3}}$ 不是最簡根式，$\dfrac{\sqrt[3]{63}}{3}$ 是最簡根式。

【範例】：(i) $\sqrt[3]{320}+3\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{64\times5}+3\sqrt[3]{5}=4\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}=7\sqrt[3]{5}$ 。

(ii) $\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{125\times2}-2\sqrt[3]{8\times2}=5\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$ 。

(iii) $2\sqrt[3]{6}\times5\sqrt[3]{3}=2\times5\sqrt[3]{6\times3}=10\sqrt[3]{18}$ 。

(iiii) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2\times2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2\times2}\times\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$ 。

(5) 平方根與立方根的比較大小：

步驟：(i) 將根號前的係數移入根號內。

(ii) 化不同次方根為同次方根。

(iii) 比較被開方數的大小順序,即為方根的大小順序。

【範例】：若 $a=2\sqrt{5}$ ，$b=3\sqrt{2}$ ，$c=2\sqrt[3]{5}$ ，$d=3\sqrt[3]{2}$ ，試比較 a、b、c、d 之大小順序。

解　：∵　$a=2\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^6\times5^3}=\sqrt[6]{64\times125}=\sqrt[6]{8000}$

$b=3\sqrt{2}=\sqrt[6]{3^6\times2^3}=\sqrt[6]{729\times8}=\sqrt[6]{5832}$

$c=2\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{2^6\times5^2}=\sqrt[6]{64\times25}=\sqrt[6]{1600}$

$d=3\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{3^6\times2^2}=\sqrt[6]{729\times4}=\sqrt[6]{2916}$

∴　$a>b>d>c$　　答：$a>b>d>c$。

(6) 立方根的近似值計算：

查表法：利用乘方開方表找出平方根與立方根的值，此種查表的方法就叫做**查表法**。

將根號內的數化為 $\sqrt{N}$ ，$\sqrt{10N}$ 或 $\sqrt{a^2N}=a\sqrt{N}$ ，在查表則可得。

【範例】：

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	$\sqrt{N^3}$	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
28	784	5.291503	16.73320	219.52	3.036589	6.542133	14.09460

則由上表可得知，$\sqrt[3]{28}=3.036589$，$\sqrt[3]{280}=6.542133$，$\sqrt[3]{2800}=14.09460$。

※補充：利用電算器求一整數的平方根的步驟是：(1) 按數字鍵 ；(2) 按” $\sqrt{\ }$ ” 鍵。

1. 若$\sqrt{x}$與$\sqrt[3]{10x}$四捨五入後，取近似值到小數第一位分別為7.5與8.3，利用乘方開方表，如附表，則x應為下列哪一個正整數？【90年第一次】

乘法開方表

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	N^3	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
55	3025	7.416198	23.45208	166375	3.802952	8.193213	17.65174
56	3136	7.483315	23.66432	175616	3.825862	8.242571	17.75808
57	3249	7.549834	23.87467	185193	3.848501	8.291344	17.86316
58	3364	7.615773	24.08319	195112	3.870877	8.339551	17.96702

(A) 55　　(B) 56　　(C) 57　　(D) 58

重點：利用查表考根號的運算

(1) $\sqrt{N} \fallingdotseq 7.5$，則對照乘方開方表可得$N=56$或$57$

(2) $\sqrt[3]{10N} \fallingdotseq 8.3$，則對照乘方開方表可得$N=57$或$58$

因此x應為57

答案選（C）

2. 已知$a=\sqrt{210}$、$b=\sqrt[3]{-10.648}$，利用乘方開方表，如附表，求出$a+b$的近似值為何？（四捨五入到小數點第一位）

乘法開方表

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	N^3	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
21	441	4.582576	14.49138	9261	2.758924	5.943922	12.80579
22	484	4.690416	14.83240	10648	2.802039	6.036811	13.00591
23	529	4.795832	14.16575	12167	2.843867	6.126926	13.20006

(A)11.5　　(B)12.3　　(C)16.7　　(D)26.6　　【91年第一次】

重點：查表法

$N=21$，$a=\sqrt{210}=\sqrt{10\times 21}=14.19138$

$b=\sqrt[3]{-10.648}=-\sqrt[3]{10.648}=-\sqrt[3]{\dfrac{10648}{1000}}=-\sqrt[3]{\dfrac{22^3}{10^3}}=-\dfrac{22}{10}=-2.2$

$a+b=14.49138+(-2.2)=12.29138\approx 12.3$

答案選（B）

3. 下列有關$\sqrt{10}$的敘述，何者<u>錯誤</u>？【92年第一次】

(A) $\sqrt{10}$是方程式$x^2=10$的一個解。

(B) 在數線上可以找到坐標為$\sqrt{10}$的點。

(C) $\sqrt{10}=2\sqrt{5}$。

(D) $\sqrt{10}<4$。

重點：平方根的意義

選項(A)：正確；即 $\sqrt{10}$ 是 10 的一個平方根。

選項(B)：正確

選項(C)：錯誤；$2\sqrt{5}=\sqrt{20}\neq\sqrt{10}$ 。

選項(D)：正確；$4=\sqrt{16}>\sqrt{10}$

答案選（C）

4. 正方體的體積為 2100 立方公分，邊長為 a 公分；正方形的面積為 240 平方公分，邊長 b 公分。請利用附表判斷下列敘述何者正確？ 【92 年第一次】

乘法開方表

N	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	N^3	$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{10N}$	$\sqrt[3]{100N}$
21	4.582 576	14.491 38	9 261	2.758 924	5.943 922	12.805 79
22	4.690 416	14.832 40	10 648	2.802 039	6.036 811	13.005 91
23	4.795 832	15.165 75	12 167	2.843 867	6.126 926	13.200 06
24	4.898 979	15.491 93	13 824	2.884 499	6.214 465	13.388 66
25	5.000 000	15.811 39	15 625	2.924 018	6.299 605	13.572 09

(A) $a<7$ (B) $b<7$ (C) $a>15$ (D) $b>15$

重點：利用查表考根號的運算

(1) $a^3=2100\Rightarrow a=\sqrt[3]{2100}\fallingdotseq 12.80579$

∴對照乘方開方表可得 $7<a<15$，(A)、(C) 不符合。

(2) $b^2=240\Rightarrow b=\pm\sqrt{240}\Rightarrow\sqrt{240}\fallingdotseq 15.49193$

∴對照乘方開方表可得 $15<b$，(B) 不符合。

答案選（D）

5. 有一個體積為 512 立方公分的正方體，求此正方體的表面積為多少平方公分？
(A) 144 (B) 192 (C) 256 (D) 384 【93 年第一次】

重點：立方根

$512=2^9=(2^3)^3=8^3$

所以邊長為 8，表面積＝6×8×8＝384

答案選（D）

6. 小宇用 1500 個大小相同的實心正方體小木塊，緊密地疊成一個最大的實心正方體，請問疊完後剩下幾個小木塊? 【93 年第二次】

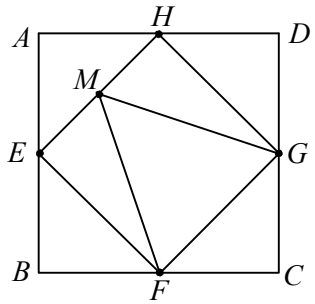
(A) 0 (B) 56 (C) 169 (D) 500

重點：立方關係

$\because 11^3=1331<1500$，$12^3=1728>1500$，$\therefore 1500-1331=169$（個）

答案選（C）

7. 如附圖，四邊形 $ABCD$ 為一正方形，E、F、G、H 為四邊中點。若 M 為 $\overline{EH}$ 中點，$\overline{MF}=4$，則△MFG 面積為何？【93 年第二次】



(A) $2\sqrt{3}$　(B) $4\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{32}{5}$　(D) $\dfrac{32}{9}$

重點：直角三角形與面積

作 $\overline{MH}\perp\overline{FG}$ $\overline{MH}\perp\overline{FG}$

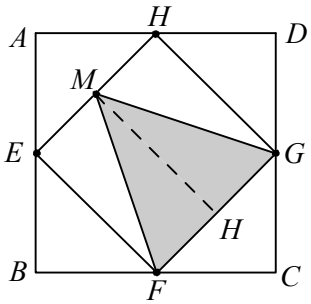
令 $\overline{EH}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{MH}=2a$

在△EMF 中

$\Theta\ a^2+(2a)^2=\overline{FG}=4^2 \Rightarrow 5a^2=16 \Rightarrow a^2=\dfrac{16}{5}$

又△MFG 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{FG}\times\overline{MH}=\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2a=2a^2$

$=2\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{32}{5}$



答案選（C）

8. 下列關於「平方根」的敘述，哪一項是正確的？【94 年模擬題本】

(A) 已知 $a=19^2$，則 a 為19的平方根。

(B) 已知 a 是36的平方根，則 $-a$ 也是36的平方根。

(C) 因為 $-9=-3^2$，所以 -3 是 -9 的平方根。

(D) 因為任一整數的平方不等於20，所以20沒有平方根。

重點：平方根的意義

選項(A)：錯誤；19為 a 的平方根。

選項(B)：正確。

選項(C)：錯誤；負數沒有平方根。

選項(D)：錯誤；有，其平方根為無理數。

答案選（B）

9. 下列哪一個數值最接近 530 的正平方根？ 【94 年第一次】

(A) 21　(B) 22　(C) 23　(D) 24

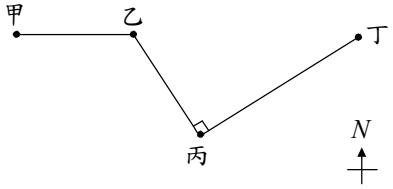
重點：平方與平方根

$\because$ $22^2=484<530$， $23^2=529<530$，$24^2=576>530$

$\therefore$ 23 最接近 530 的正平方根

答案選（C）

10. 如附圖，某車由甲地等速前往丁地，過程是：自甲向東直行 8 分鐘至乙後，朝東偏南直行 8 分鐘至丙，左轉 90 度直行 15 分鐘至丁。若此車由甲地以原來的速率向東直行可到達丁地，則此車程需多少分鐘？ 【94 年第一次】



(A) 19.5　(B) 24　(C) 25　(D) 28

重點：直角三角形與商高定理

$\because \angle$乙丙丁$=90^\circ$，$\therefore \overline{乙丁}=\sqrt{8^2+15^2}=17$

$\therefore 8+17=25$（分鐘）

答案選（C）

11. 已知 a、b 為方程式 $(\frac{2}{5}x+1)^2=680$ 的兩根，且 $a>b$，利用附表，求 $\frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b$ 之值最接近下列哪一數？ 【94 年第二次】

N	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
2	1.414	4.472
5	2.236	7.071
34	5.831	18.439
68	8.246	26.077

(A) 0　(B) 2　(C) 37　(D) 52

重點：平方根與查表法

$\because$ $(\frac{2}{5}x+1)^2=680 \Rightarrow \frac{2}{5}x+1=\pm\sqrt{680} \Rightarrow \frac{2}{5}x=-1\pm\sqrt{680}$

又 a、b 為方程式之兩根且 $a>b$ 代入

$\therefore \frac{2}{5}a=-1+\sqrt{680}$，$\frac{2}{5}b=-1-\sqrt{680}$

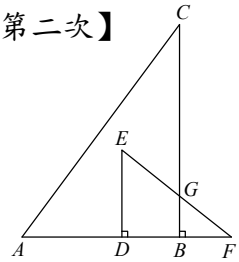
$\therefore \frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=(-1+\sqrt{680})-(-1-\sqrt{680})=-1+\sqrt{680}+1+\sqrt{680}=2\sqrt{680}$

$=2\times 26.077=52.154\fallingdotseq 52$

答案選（D）

12. 如附圖，$\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 皆為直角三角形，D、B 兩點在 $\overline{AF}$ 上，$\overline{BC}$ 與 $\overline{EF}$ 相交於 G 點。若 $\overline{AC}=25$，$\overline{EF}=15$，$\overline{BC}=20$，$\overline{DE}=9$，且 $\overline{DB}=\frac{2}{5}\overline{AB}$，則 $\overline{CG}=$？

(A) 14.5　(B) 15.5　(C) 16.5　(D) 17.5　【94 年第二次】



重點：直角三角形與商高定理

$\because \triangle ABC$ 為直角三角形，$\therefore \overline{AB}=\sqrt{25^2-20^2}=15$

又 $\overline{DB}=\frac{2}{5}\times 15=6$　　同理 $\overline{DF}=\sqrt{15^2-9^2}=12$

$\because \triangle DEF \sim \triangle BGE$（$AA$ 相似），$\therefore \overline{BF}=12-6=6$

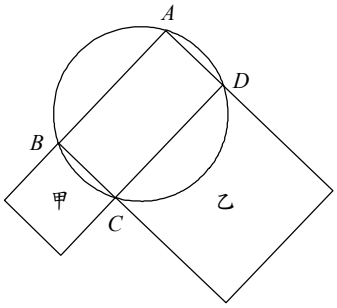
$\because \triangle BGF \sim \triangle DEF$（$AA$ 相似），$\frac{\overline{BG}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{\overline{BG}}{9}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \Rightarrow \overline{BG}=\frac{9}{2}=4.5$

$\therefore \overline{CG}=\overline{BC}-\overline{BG}=20-4.5=15.5$

答案選（B）

13. 如圖（二），有一圓及長方形 $ABCD$，其中 A、B、C、D 四點皆在圓上且 $\overline{BC}<\overline{CD}$。今分別以 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 為邊長作甲、乙兩正方形。若圓半徑為 1.5 公分，則甲、乙面積和為多少平方公分？【95 年第一次】

(A) 4.5　(B) 6　(C) 7.5　(D)9



重點：商高定理

圓周角 $=90^\circ$，其對應的弦為直徑

$\because ABCD$ 為長方形，$\therefore \angle BCD=90^\circ$

$\because \angle BCD=90^\circ$，$\therefore \overline{BD}$ 為直徑且 $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$

又因為甲、乙皆為正方形 所以 $3^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2 \Rightarrow$ 甲面積＋乙面積＝9（平方公分）

答案選（D）

14. 若 a、b 為方程式 $(x-29)^2=247$ 的兩根，則下列敘述何者正確？　【95 年第一次】

(A) a 為 247 的平方根　(B) $a+b$ 為 247 的平方根

(C) $a+29$ 為 247 的平方根　(D) $29-b$ 為 247 的平方根

重點：平方根的觀念：$x^2=a$，$a>0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$

$(x-29)^2=247 \Rightarrow x-29=\pm\sqrt{247} \Rightarrow x=29\pm\sqrt{247}$

則 $a=29+\sqrt{247}$，$b=29-\sqrt{247}$ 或 $a=29-\sqrt{247}$，$b=29+\sqrt{247}$

(A) a 只是 247 平方根中的一個根

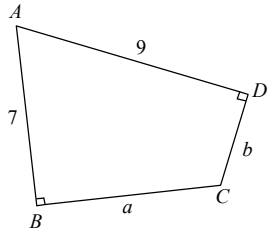
(B) $a+b=58 \Rightarrow 58^2=3364\neq 247$

（C）$(a+29)^2 \neq 247$

（D）$29-b=\pm\sqrt{247}$

答案選（D）

15. 如附圖，$\overline{AB} \perp \overline{BC}$、$\overline{AD} \perp \overline{CD}$，且 $\overline{AB}=7$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CD}=b$、$\overline{AD}=9$，求 $(a+b)(a-b)=$？



（A）16　　（B）32

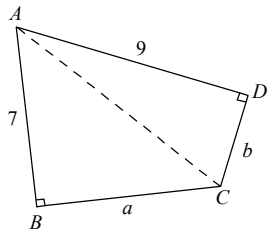
（C）63　　（D）130　　【95 年第二次】

重點：商高定理

連接 $\overline{AC}$，已知 $7^2+a^2=\overline{AC}^2=9^2+b^2$

而 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2=9^2-7^2=81-49=32$

答案選（B）



16. $x=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，則 $x^2+4xy+y^2=$？

（A）8　　（B）16　　（C）24　　（D）32

重點：利用乘法公式求含有平方根的式子之值

$\because x+y=2\sqrt{5}$ 且 $xy=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2$

$\therefore x^2+4xy+y^2=(x+y)^2+2xy=(2\sqrt{5})^2+2\times 2=20+4=24$

答案選（C）

17. 對於任意兩數 a、b，請觀察下面的推論：

（甲）$\because a^2-2ab+b^2=b^2-2ab+a^2$，$\therefore (a-b)^2=(b-a)^2$

（乙）將等號左右兩邊開根號仍然相等，$\therefore \sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(b-a)^2}$

（丙）$\because \sqrt{(a-b)^2}=a-b$，$\sqrt{(b-a)^2}=b-a$，$\therefore a-b=b-a$

（丁）將等號左右兩邊同時加上 $a+b$，得 $2a+2b$，$\therefore a=b$

但是我們知道 a、b 為任意數，所以 a 和 b 不一定會相等，即 $a=b$ 此結果有誤，請問上述推論哪一步驟觀念開始錯誤？

(A)（甲)步驟一開始就錯了　　(B)（乙)步驟推論開始錯了

(C)（丙)步驟推論開始錯了　　(D)（丁)步驟推論錯了

重點：平方根的意義

(丙)步驟：$\because \sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$，$\sqrt{(b-a)^2}=|b-a|$ 且 a，b 為任意數

$\therefore |a-b|$ 不一定等於 $|b-a|$

答案選（C）

18. 若 $\sqrt{103+42\sqrt{6}}$ 可有理化為 $3\sqrt{a}+b$ 之形式，則 $a+b$ 之值為何？

(A) 11　　(B) 13　　(C) 15　　(D) 17

重點：最簡根式的計算

$\because \sqrt{103+42\sqrt{6}}=\sqrt{103+2\sqrt{2646}}=\sqrt{(\sqrt{54}+\sqrt{49})^2}=\sqrt{54}+\sqrt{49}=3\sqrt{6}+7$

$\therefore a=6$，$b=7 \Rightarrow a+b=6+7=13$

答案選（B）

19. 計算 $(\frac{\sqrt{12}+\sqrt{5}}{8})^2-(\frac{\sqrt{12}+\sqrt{5}}{8})(\frac{\sqrt{12}-\sqrt{5}}{8})+(\frac{\sqrt{12}-\sqrt{5}}{8})^2$ 之後，可得下列哪一個結果？

(A) $\frac{19}{64}$　　(B) $\frac{23}{64}$　　(C) $\frac{27}{64}$　　(D) $\frac{31}{64}$

重點：最簡根式的計算

設 $a=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{5}}{8}$，$b=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{5}}{8}$，$ab=\frac{12-5}{8\times 8}=\frac{7}{64}$，$a-b=\frac{2\sqrt{5}}{8}$

原式 $=a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab=(\frac{2\sqrt{5}}{8})^2+\frac{7}{64}=\frac{20}{64}+\frac{7}{64}=\frac{27}{64}$

答案選（C）

20. 若 $5-\sqrt{3}$ 為方程式 $x^2-2x+m=0$ 的一根，則 $m=$？

(A) $-15+5\sqrt{3}$　(B) $-16+6\sqrt{3}$　(C) $-17+7\sqrt{3}$　(D) $-18+8\sqrt{3}$

重點：方程式之解含有根號時的運算

將 $5-\sqrt{3}$ 代入方程式可得 $(5-\sqrt{3})^2-2(5-\sqrt{3})+m=0$

$\Rightarrow m=-(25-10\sqrt{3}+3)+2(5-\sqrt{3})=-28+10\sqrt{3}+10-2\sqrt{3}=-18+8\sqrt{3}$

答案選（D）

21. 已知-7是$2x+35$的一個平方根，-2是$3y+1$的立方根，則$\sqrt{(x+y)^3}$之值為何？

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

重點：根式的綜合運算

$2x+35=(-7)^2=49 \Rightarrow x=\dfrac{49-35}{2}=7$，$3y+1=(-2)^3=-8 \Rightarrow y=-3$

$\sqrt{(x+y)^3}=\sqrt{(7-3)^3}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8$

答案選(D)

22. 設$a=\sqrt{12}+\sqrt{7}$，$b=\sqrt{13}+\sqrt{6}$，$c=\sqrt{14}+\sqrt{5}$，試比較a、b、c的大小關係？

(A) $a>b>c$　　(B) $a>c>b$　　(C) $b>c>a$　　(D) $c>b>a$

重點：平方根之大小

$a=(\sqrt{12}+\sqrt{7})^2=19+2\sqrt{84}$，$b=(\sqrt{13}+\sqrt{6})^2=19+2\sqrt{78}$，

$c=(\sqrt{14}+\sqrt{5})^2=19+2\sqrt{70}$。

$\because \sqrt{70}<\sqrt{78}<\sqrt{84}$，$\therefore \sqrt{14}+\sqrt{5}<\sqrt{13}+\sqrt{6}<\sqrt{12}+\sqrt{7} \Rightarrow c^2<b^2<a^2$

又$a>0$，$b>0$，$c>0$，$\therefore c<b<a$。

答案選(A)

23. 設$a=\sqrt{12}-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{14}-\sqrt{3}$，$c=3-2\sqrt{2}$，試比較a、b、c的大小關係？

(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$　　(C) $b>c>a$　　(D) $c>b>a$

重點：平方根之大小

$a^2=(\sqrt{12}-\sqrt{5})^2=17-2\sqrt{60}$，$b^2=(\sqrt{14}-\sqrt{3})^2=17-2\sqrt{42}$

$c^2=(3-2\sqrt{2})^2=17-12\sqrt{2}=17-2\sqrt{72}$

$\therefore b^2>a^2>c^2$，又$\because a>0$，$b>0$，$c>0$，$\therefore b>a>c$

答案選(B)

24. 若$3\sqrt{5}$的小數部分為y，則y^2之值為何？

(A) $90-32\sqrt{5}$　　(B) $81-36\sqrt{5}$　　(C) $72-45\sqrt{5}$　　(D) $63-49\sqrt{5}$

重點：平方根的運算

$\because 3\sqrt{5}=\sqrt{45}$，$\therefore \sqrt{36}<\sqrt{45}<\sqrt{49} \Rightarrow 6<3\sqrt{5}<7$。

因此可得知$3\sqrt{5}$的整數部分為6，即$3\sqrt{5}$的小數部分為$y=(3\sqrt{5}-6)$。

$\therefore y^2=(3\sqrt{5}-6)^2=(3\sqrt{5})^2-2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 6+6^2=81-36\sqrt{5}$

答案選(B)

25. 若 $a=\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$ ，$b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ ，$a+b=$？

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

重點：立方根的運算

假設 $a+b=x$，其中 x 為實數

且 $ab=\sqrt[3]{(5+2\sqrt{13})(5-2\sqrt{13})}=\sqrt[3]{5^2-(2\sqrt{13})^2}=\sqrt[3]{25-52}=\sqrt[3]{-27}=-3$

又由立方和公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

可得 $x^3=(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}})^3+(\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}})^3+3\times(-3)\times x$

$\Rightarrow x^3=(5+2\sqrt{13})+(5-2\sqrt{13})-9x \Rightarrow x^3+9x-10=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+10)=0$

$\Rightarrow x=1 \Rightarrow a+b=1$ (x 為虛數不合)

答案選（A）

26. 若 x 為正整數，且符號 $[\sqrt{x}]$ 表示 $\sqrt{x}$ 的整數部分，例如 $[\sqrt{5}]=2$，$[\sqrt{10}]=3$；若 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\Lambda+[\sqrt{n}]=42$，則 $n=$？

(A) 15　　(B) 16　　(C) 17　　(D) 18

重點：平方根的整數部分計算

$\because [\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\Lambda+[\sqrt{n}]=42$

且 $1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+3+3+3+3+3+4+4=42$

$\therefore [\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\Lambda+[\sqrt{16}]+[\sqrt{17}]=42$，$\therefore n=17$

答案選（C）

27. 設 a、b 為整數，若 $\sqrt{(3a-b+16)^2}+\sqrt{(4a+3b-9)^2}=0$，則 $\sqrt{-6a+b}=$？

(A) 5　　(B) $\sqrt{26}$　　(C) $3\sqrt{3}$　　(D) $2\sqrt{7}$

重點：平方根的整數部分計算

$\because \sqrt{(3a-b+16)^2}+\sqrt{(4a+3b-9)^2}=0$

$$\Rightarrow \ |3a-b+16|+|4a+3b-9|=0 \Rightarrow \begin{cases} 3a-b+16=0 & \Lambda\ (1) \\ 4a+3b-9=0 & \Lambda\ (2) \end{cases}$$

由 $(1)\times 3+(2)$ 可得 $13a+39=0 \ \Rightarrow\ a=-3 \ \Rightarrow\ b=3\times(-3)+16=7$

$\therefore \sqrt{-6a+b}=\sqrt{(-6)\times(-3)+7}=\sqrt{18+7}=\sqrt{25}=5$

答案選（A）

28. 若欲使$\sqrt{1\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{21}{10}}\div(\ )$化簡後得到的值為整數，則( )內不可以填入下列哪一個數？

(A) $\sqrt{\frac{7}{2}}$　　(B) $\sqrt{\frac{2}{7}}$　　(C) $\sqrt{\frac{7}{8}}$　　(D) $\sqrt{\frac{7}{18}}$

重點：平方根的乘、除運算

$\sqrt{1\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{21}{10}}=\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{21}{10}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$

選項(A)：$\sqrt{\frac{7}{2}}\div\sqrt{\frac{7}{2}}=1$ ， 選項(B)：$\sqrt{\frac{7}{2}}\div\sqrt{\frac{2}{7}}=\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$

選項(C)：$\sqrt{\frac{7}{2}}\div\sqrt{\frac{7}{8}}=\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{\frac{8}{7}}=\sqrt{4}=2$

選項(D)：$\sqrt{\frac{7}{2}}\div\sqrt{\frac{7}{18}}=\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{\frac{18}{7}}=\sqrt{9}=3$

答案選（B）

29. 若a為二位數的正整數，欲使$\sqrt{180a}$為整數，則a之值共有幾種可能？

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

重點：平方根的意義與運算

欲使$\sqrt{180a}$為整數，則$180a$必為完全平方數。

$\because 180=2^2\times3^2\times5$，$\therefore a$的最小值為5。又$\because a$為二位數的正整數，

$\therefore a$之值可能為$5\times2^2=20$，$5\times3^2=45$，$5\times4^2=80$，共3種。

答案選（C）

30. 下列哪一組數不為直角三角形的三邊長？

(A) 9，12，15　　(B) 10，24，26　　(C) 7，24，25　　(D) 9，31，32

重點：商高定理的應用(利用$a^2+b^2=c^2$)

選項(A)：$9^2+12^2=81+144=225=15^2$，

選項(B)：$10^2+24^2=100+576=676=26^2$

選項(C)：$7^2+24^2=49+576=625=25^2$，

選項(D)：$9^2+31^2=81+961=1042\neq1024=32^2$

答案選（D）

31. 已知$\sqrt{720}=26.8\text{K}$，欲使$\sqrt{720a}$，$\sqrt{\dfrac{720}{b}}$，$\sqrt{720+c}$，$\sqrt{720-d}$均為正整數，當a、b、c、d均為最小正整數時，求$\sqrt{a+b+c+d+1}=$？

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10

重點：平方根的四則運算

$\sqrt{720a}=\sqrt{4^2\times3^2\times5\times a}$ 為正整數，所以$a=5$。

$\sqrt{\dfrac{720}{b}}=\sqrt{\dfrac{4^2\times3^2\times5}{b}}$ 為正整數，所以$b=5$。

已知$\sqrt{720}=26.8\text{K}$，可得$26^2=676<720<729=27^2$。

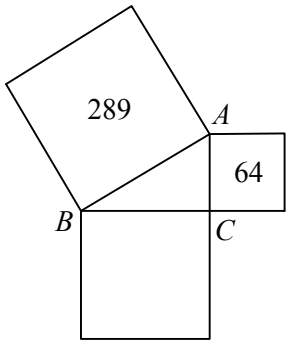
當$\sqrt{720+c}$為正整數，則$c=729-720=9$。

當$\sqrt{720-d}$為正整數，則$d=720-676=44$。

因此$\sqrt{a+b+c+d+1}=\sqrt{5+5+9+44+1}=\sqrt{64}=8$

答案選(B)

32. 如附圖，$\triangle ABC$的$\angle C=90^\circ$，以$\overline{AB}$、$\overline{AC}$為邊之正方形面積分別為289平方公分、64平方公分，若$\triangle ABC$的周長為x公分而$\triangle ABC$的面積為y平方公分，則$x+y=$？



(A) 80　　(B) 90　　(C) 100　　(D) 110

重點：平方根與商高定理的應用

$\because\ \overline{AC}=\sqrt{64}=8$；$\overline{AB}=\sqrt{289}=17$

$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{289-64}=\sqrt{225}=15$

$\therefore\ \triangle ABC$的周長$=x=8+17+15=40$

$\triangle ABC$的面積$=y=\dfrac{1}{2}\times8\times15=60\ \Rightarrow\ x+y=100$

答案選(C)