

## 因式分解

### 【因式的判別】：

若  $f(x) = g(x) \times Q(x)$  能整除，則  $g(x)$  與  $Q(x)$  皆為  $f(x)$  的因式。

**【範例】：**請判別  $x+3$  是否為  $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$  的因式。

解：因為  $(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) \div (x + 3) = x^2 + x + 1 \dots\dots 0$

可以整除，所以  $x+3$  是  $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$  的因式。

### 【因式定理】：

(1) 若  $x - c$  是多項式  $f(x)$  的因式，則  $f(c) = 0$ 。

**【範例】：**請判別  $x+5$  是否為  $f(x) = x^2 - 4x - 45$  的因式。

解：若  $x+5$  是  $f(x) = x^2 - 4x - 45$  的因式，則  $f(x) = (x+5)g(x)$

$$f(x) = x^2 - 4x - 45 \Rightarrow f(-5) = (-5)^2 - 4 \times (-5) - 45 = 25 + 20 - 45 = 0$$

$$\therefore f(-5) = (-5+5)g(-5) = 0 \times g(-5) = 0.$$

∴  $x+5$  是  $f(x) = x^2 - 4x - 45$  的因式。

(2) 若  $ax+b$  是多項式  $f(x)$  的因式，則  $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ 。

**【範例】：**請判別  $2x-3$  是否為  $f(x) = 4x^2 - 2x - 6$  的因式。

解：若  $2x-3$  是  $f(x) = 4x^2 - 2x - 6$  的因式，

$$\text{則 } f(x) = 4x^2 - 2x - 6 = (2x-3)g(x)$$

$$f(x) = 4x^2 - 2x - 6 \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2} - 6 = 4 \times \frac{9}{4} - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$$

所以  $2x-3$  是  $f(x) = 4x^2 - 2x - 6$  的因式。

### 【提公因式法因式分解】：

(1) 從各項提公因式：

如果發現每一項都有共同的因式(數)時，我們可先將此公因式提出。

**【範例】：**因式分解下列多項式：(i)  $(a-b)^2 - 2(a-b)$  (ii)  $(x-2y)^2 + (2y-x)^3$

$$\text{解：(i)} \quad (a-b)^2 - 2(a-b) = (a-b)(a-b) - 2(a-b)$$

$$= (a-b) [(a-b)-2] = (a-b)(a-b-2)$$

$$\text{(ii)} \quad (x-2y)^2 + (2y-x)^3 = (x-2y)^2 - (x-2y)^3$$

$$= (x-2y)^2 [1 - (x-2y)] = (x-2y)^2 (1-x+2y)$$

(2) 分組提公因式：當各項沒有公因式時，可嘗試重新分組，再觀察每組之間是否有公因式。

**【範例】：**因式分解下列各式：(i)  $2ax^2 - 3x + 2ax - 3$  (ii)  $27x^3 - 9x^2 + 3x - 1$

$$\text{解：(i)} \quad \text{原式} = (2ax^2 - 3x) + 2ax - 3 = x(2ax - 3) + 2ax - 3 = (2ax - 3)(x + 1)$$

$$\text{(ii)} \quad \text{原式} = (27x^3 - 9x^2) + (3x - 1) = 9x^2(3x - 1) + (3x - 1) = (3x - 1)(9x^2 + 1)$$

(3) 拆項後分組提公因式：有時候，可嘗試先將某一項拆開後，再利用分組提公因式。

**【範例】：**因式分解多項式  $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$ 。

解：將多項式中  $x^2$  改寫成  $2x^2 - x^2$ 。

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 &= x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x^2 - 3x - 2 \\ &= x^2(x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1) \\ &= (x+1)(x+2)(x-1)(x+1) = (x+1)^2(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

**【利用乘法公式因式分解】：**

對於某些多項式，我們可直接利用乘法公式來做因式分解。

(1) 完全平方公式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ； $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ 。

(2) 平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。

**【範例】：**因式分解  $4x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} \text{解} : \text{原式} &= (2xy)^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (2xy)^2 - (x-y)^2 = (2xy+x-y)(2xy-x+y) \end{aligned}$$

(3) 立方和、立方差公式： $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

**【範例】：**因式分解下列各式：(i)  $x^6 - 1$  (ii)  $\frac{1}{27} - 8a^3$

$$\begin{aligned} \text{解} : (i) x^6 - 1 &= (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \frac{1}{27} - 8a^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - (2a)^3 = \left(\frac{1}{3} - 2a\right)\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times 2a + (2a)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2a\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}a + 4a^2\right) \end{aligned}$$

**【十字交乘法因式分解】：**

**【範例】：**因式分解下列各式：(1)  $8x^6 - 7x^3 - 1$  (2)  $6a^2b^2 - abc - 15c^2$

$$\begin{aligned} \text{解} : (1) \quad 8x^6 - 7x^3 - 1 &= (8x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)(x-1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$8x^3$	$+1$
$1x^3$	$-1$
$-8x^3 + 1x^3 = -7x^3$	

$$\begin{aligned} (2) \quad 6a^2b^2 - abc - 15c^2 &= 6(ab)^2 - ab \cdot c - 15c^2 \\ &= (2ab + 3c)(3ab - 5c) \end{aligned}$$

$2ab$	$+3c$
$3ab$	$-5c$
$-10abc + 9abc = -abc$	

1. 下列四個選項中，哪一個是  $2x^2 - 7x + 6$  的因式？

- (A)  $x - 1$  (B)  $x - 2$  (C)  $x - 3$  (D)  $x + 3$

【90 年模擬題本一】

2. 請閱讀下列式子後，回答下兩題，若  $f(x) = 22x^2 - 9x - 1$

【90 年模擬題本二】

(1) 下列哪一個選項為  $f(x)$  的因式

- (A)  $22x - 1$  (B)  $11x + 1$  (C)  $11x - 1$  (D)  $2x + 1$

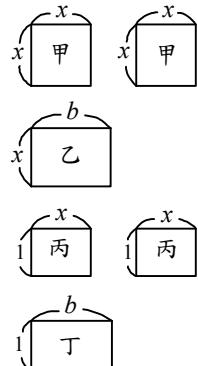
(2) 若  $a = 22 \times 8 \times 8 - 9 \times 8 - 1$ ，下列哪一個選項是  $a$  的因數

- (A) 17 (B) 87 (C) 89 (D) 175

3. 如附圖，有甲、乙、丙、丁四種不相似的矩形，已知邊長均為正整數，其中有 2 個甲，1 個乙，2 個丙，1 個丁，今將這 6 個圖形，拼成一個大的矩形，則其兩鄰邊的邊長分別為多少？

【90 年第一次】

- (A)  $2x + 1$ ,  $x + b$  (B)  $2x + b$ ,  $x + 1$   
 (C)  $x + 2b$ ,  $2x + 1$  (D)  $x + 1$ ,  $2x + 2b$



4. 將  $4x^2 - ax + 9$  因式分解可得  $(2x - b)^2$  的形式。若  $a$  為正整數，則  $2a - b = ?$

- (A) 17      (B) 19      (C) 21      (D) 23      【90 年第二次】

5. 下列哪一個多項式是  $6x^2 - 7x - 3$  與  $4x^2 - 12x + 9$  的公因式？【91 年第二次】

- (A)  $2x^2 + 5x - 12$       (B)  $(2x - 3)^2$       (C)  $2x - 3$       (D)  $3x + 1$

6. 如附圖，有  $A$  型、 $B$  型、 $C$  型三種不同的紙板，其中

$A$  型：邊長為  $\pi$  公分( $\pi$  為圓周率)的正方形，共有 7 塊；

$B$  型：長為  $\pi$  公分，寬為 1 公分的長方形，共有 17 塊；

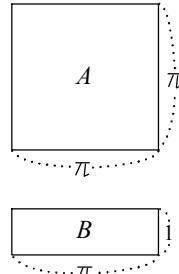
$C$  型：邊長為 1 公分的正方形，共有 12 塊。

從這 36 塊紙板中，拿掉一塊紙板，使得剩下的紙板

在不重疊的情況下，可以緊密的排出一個大長方形

，請問拿掉的是哪一種紙板？【91 年第二次】

- (A)  $A$  型      (B)  $B$  型      (C)  $C$  型      (D) 完全不用拿掉，就可排出一個大長方形。



7. 若  $481x^2 + 2x - 3$  可因數分解成  $(13x+a)(bx+c)$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均為整數，則下列敘述何者正確？

【92年第一次】

- (A)  $a = 1$       (B)  $b = 468$       (C)  $c = -3$       (D)  $a+b+c = 39$

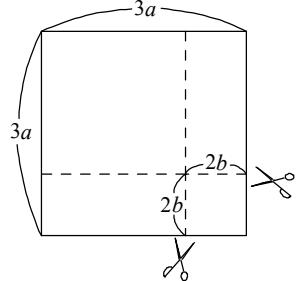
8. 已知  $3x^2 - x - 10 = (3x+5)(x-2)$ ，請問下列哪一個敘述是正確？

【93年第二次】

- (A)  $3x^2 - x - 10$  為  $x - 2$  的倍式      (B)  $x - 2$  為  $3x^2 - x - 10$  的倍式  
 (C)  $3x + 5$  為  $3x^2 - x - 10$  的倍式      (D)  $3x^2 - x - 10$  為  $3x + 5$  的因式

9. 如附圖，守守將邊長為  $3a$  的正方形沿著虛線剪成二塊正方形及二塊長方形，果拿掉邊長為  $2b$  的小正方形後，再將剩下的三塊拼成一塊矩形，則此塊矩形長的邊長為何？

- (A)  $3a + 2b$       (B)  $3a + 4b$       (C)  $6a + 2b$       (D)  $6a + 4b$ 。



10. 若  $1999^2 - 2009^2 = 1333 \times a$ ，則  $a = ?$

- (A) 1      (B) -1      (C) 3      (D) -3

11. 若  $(3xy+8)-2(x+6y) = (ax+b)(cy+d)$ ，則下列何者可能是  $a+b+c+d$  的值？

- (A) 4      (B) 2      (C) -1      (D) -3

12. 已知  $a$ 、 $b$  是整數，若  $x^2 + mx - 12$  可分解為  $(x+a)(x+b)$ ，則  $m$  不可能 是下列何數？

- (A) 11      (B) 7      (C) 4      (D) 1

13. 下列哪一個數可以寫成  $n(n+6)+9$  的形式？(其中  $n$  為整數)

- (A) 281      (B) 284      (C) 285      (D) 289

14. 因式分解  $(6x^2 - 5xy - 6y^2) + (12x + 8y)$  的結果為  $(3x + ay)(bx + cy + d)$ ，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  四數中，有幾個數是奇數？

- (A) 1 個      (B) 2 個      (C) 3 個      (D) 4 個

15. 若  $x^2 + ax - 8$  可分解為兩個一次因式的乘積，則下列何者不可能為整數  $a$  的值？

- (A) -7      (B) -6      (C) -2      (D) 2

16. 請問  $99 \times 101 + 26 \times 24 - 99^2 - 2 \times 99 - 1 - 25^2$  之值是多少？

- (A) -1      (B) -2      (C) 0      (D) 1

17. 設  $x = 3.78$ ， $y = 0.39$ ，則  $x^2 + 4y^2 - 4xy + 1$  之值為何？

- (A) 7      (B) 8      (C) 9      (D) 10

18. 若  $a = 99 \times 3251 - 99 \times 3075 - 99^2$ ，則下列何者為  $a$  的標準分解式？

- (A)  $3^2 \times 7^2 \times 11$       (B)  $3^2 \times 7 \times 11^2$       (C)  $3 \times 7^2 \times 11^2$       (D)  $3^2 \times 7^2 \times 11^2$

19. 設  $x + y - 2 = 0$ ，則  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3$  之值為何？

- (A) 3      (B) -3      (C) 5      (D) -5

20. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為  $\triangle ABC$  之三邊長，且  $a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 24b - 26c + 338 = 0$ ，則  $\triangle ABC$  為何種三角形？

- (A) 正三角形      (B) 直角三角形      (C) 等腰三角形      (D) 無法判斷

21. 設  $x$ 、 $y$  為整數，且  $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$ ，則  $2x + y$  之值為何？

- (A) 3    (B) 2    (C) -2    (D) -3

22. 設  $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ ，若  $p < 0$ ， $q < 0$ ，且  $|a| > |b|$ ，則下列何者正確？

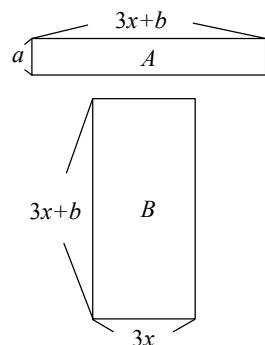
- (A)  $a > 0$ ， $b > 0$     (B)  $a > 0$ ， $b < 0$     (C)  $a < 0$ ， $b > 0$     (D)  $a < 0$ ， $b < 0$

23. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為  $\triangle ABC$  之三邊長，且  $a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 8b - 8c + 48 = 0$ ，則  $\triangle ABC$  的

- 面積為何？ (A) 6    (B)  $\frac{15\sqrt{3}}{4}$     (C)  $4\sqrt{3}$     (D) 12

24. 如附圖，有  $A$ 、 $B$  兩個矩形，今將這 2 個矩形拼成一個大的矩形，則下列何者可表示大矩形的面積？

- (A)  $9x^2 + bx + b$     (B)  $(3x + a)(6x + 2b)$   
 (C)  $3ax(x + b)$     (D)  $(3x + a)(3x + b)$



25. 將  $2^{12} - 1$  做質因數分解，則其最大的質因數為何？

- (A) 11    (B) 13    (C) 17    (D) 19

26.  $\frac{1998^3 + 3 \times 1998^2 + 3996}{1998^2 + 1998}$  之值為何？

- (A) 2000      (B) 2500      (C) 3000      (D) 3500

27. 若  $x$ 、 $y$  都是正整數，且  $3x^2 + 10xy - 8y^2$  之值為 19，則  $x - y$  之值為何？

- (A) -2      (B) -1      (C) 0      (D) 1

28. 若  $0 < x < 1$ ，且  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ ，則  $x - \frac{1}{x}$  之值為何？

- (A) 5      (B) -5      (C)  $\sqrt{5}$       (D)  $-\sqrt{5}$

29. 若  $16x^2 - (m-1)x + 25$  為完全平方式，下列何者可能為  $m$  之值？

- (A) -41      (B) -39      (C) 37      (D) 39

30. 若  $2 \times 4 \times (3^2 + 1) \times (3^4 + 1) \times (3^8 + 1) \times (3^{16} + 1) = 3^n - 1$ ，求  $n$  為何？

- (A) 16      (B) 32      (C) 64      (D) 128

31. 如附圖，已知一長方體兩兩相鄰的三面之面積分別為：甲： $2x^2 - 3x - 2$ ；

乙： $x^2 - 4$ ；丙： $2x^2 + 5x + 2$  其中  $x > 2$ ，則此長方體的體積為何？

- (A)  $2x^3 + x^2 - 8x - 4$       (B)  $2x^3 + x^2 + 8x + 4$   
 (C)  $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$       (D)  $2x^3 - x^2 - 8x + 4$

