圓形

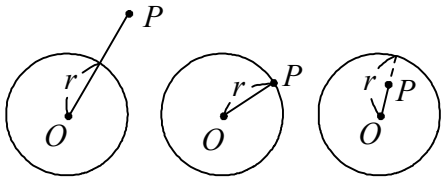
點與圓的位置關係：

若任意一點 P 與圓心 O 的距離為 $\overline{OP}$，半徑為 r，則：

(1)若 $\overline{OP} > r$，則點在圓外。

(2)若 $\overline{OP} = r$，則點在圓上。

(3)若 $\overline{OP} < r$，則點在圓內。



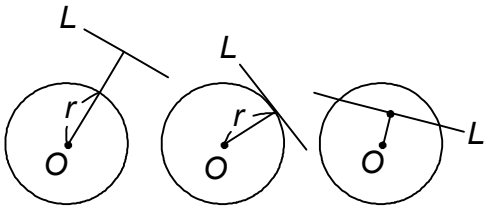
直線與圓的位置關係：

若任意直線 L 與圓心 O 的距離為 $\overline{OL}$，半徑為 r，則：

(1)若 $\overline{OL} > r$，則直線 L 在圓外，且與圓 O 無交點。

(2)若 $\overline{OL} = r$，則直線 L 與圓 O 相切於一點。

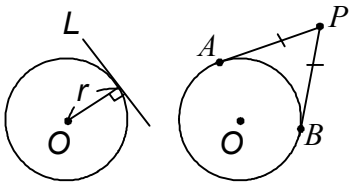
(3)若 $\overline{OL} < r$，則直線 L 為此圓的割線且與圓 O 相交於兩點。



切線性質：

(1)圓心與切線的連線，垂直此切線。

(2)過圓外一點向此圓所做的兩切線等長。



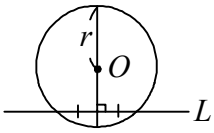
$\overline{PA}=\overline{PB}$

弦的性質：

(1)弦的垂直平分線必通過圓心。

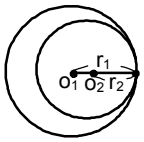
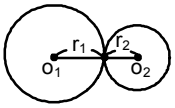
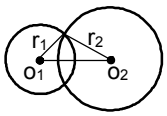
(2)垂直於弦的直徑並平分此弦。

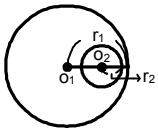
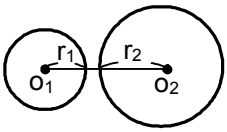
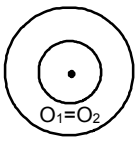
(3)弦心距必小於半徑。



$\overline{OL}<r$

兩圓的位置關係與連心線：

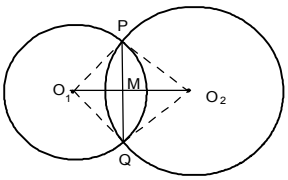
兩圓的位置關係	圖示	連心線長與半徑關係
內切		$\overline{O_1O_2} = \lvert r_1 - r_2 \rvert$
外切		$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$
相交於兩點		$\lvert r_1 - r_2 \rvert < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$

內離		$\overline{O_1O_2} < \lvert r_1 - r_2 \rvert$
外離		$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$
同心圓		$\overline{O_1O_2} = 0$

連心線的相關性質：

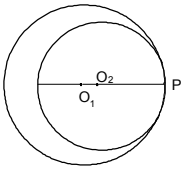
（1）兩圓相交於 P、Q 兩點，兩圓的連心線必垂直平分 $\overline{PQ}$。

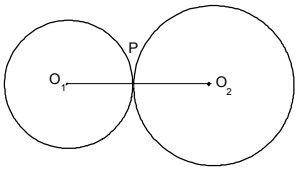
$\overline{O_1O_2} \perp \overline{PQ}$，$\overline{PM} = \overline{QM}$。



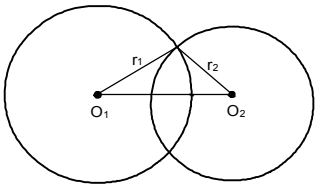
（2）兩圓相切，則這兩圓的切點必在它們連心線上。

P 點在 $\overline{O_1O_2}$ 上。





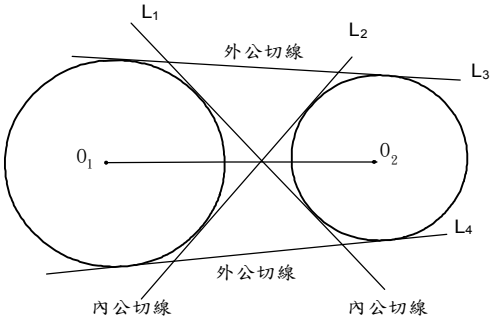
（3）交於兩點的兩圓，其連心線長必小於這兩圓半徑的和，大於兩圓半徑之差。如圖圓 0_1 與圓 0_2 兩圓相交兩點，連心線長 $\overline{O_1O_2}$；$\lvert r_1 - r_2 \rvert < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$



兩圓的公切線：

L_1 與 L_2 為兩圓的內公切線。

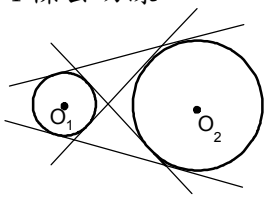
L_3 與 L_4 為兩圓的外公切線。



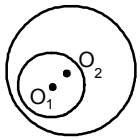
公切線的情形：

（一）兩圓不相交

（a）外離：4 條公切線

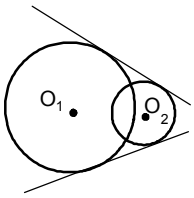


（b）內離：沒有公切線

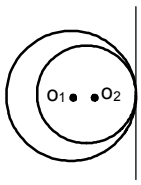


（二）兩圓相交

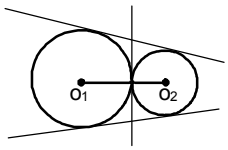
（a）相交兩點：2 條公切線



(b)內切：1 條公切線



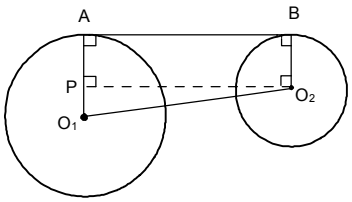
(c)外切：3 條公切線

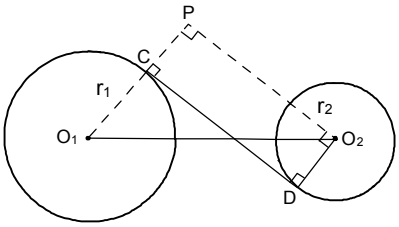


公切線的求法：

若 r_1、r_2 為圓 0_1 與圓 0_2 的半徑，且 $r_1 > r_2$，$\overline{O_1O_2}$ 為連心線長，則：

（1）外公切線長＝$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$ 。　（2）內公切線長＝$\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$ 。





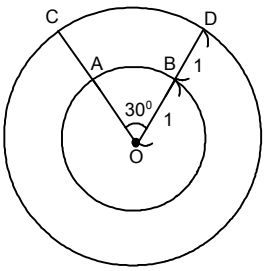
圓心角與弧長的關係：

當兩個圓的圓心重疊為同心圓時，他們的圓心角相等，

但弧長未必相等。

$\angle AOB = \angle COD = 30^0$，

$\overset{\frown}{AB}$ 的弧長 $\neq \overset{\frown}{CD}$ 的弧長。

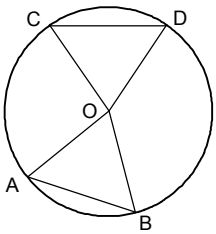


圓心角與弧弦的對應關係：

如果兩圓心角相等，則它們所對的弧長相等，所對的弦也相等

若 $\angle AOB = \angle COD$，則：

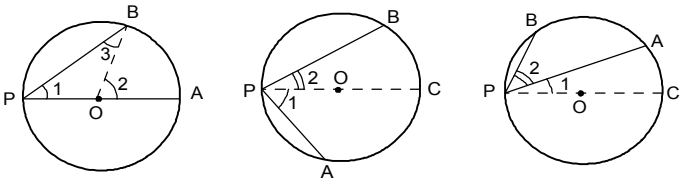
$\overline{AB} = \overline{CD}$，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ 。



圓周角的性質：

1. 圓周角的度數＝所對弧度數的一半。

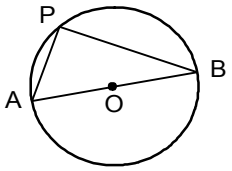
   如右圖，$\angle APB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$



2. 圓形中，直徑所對的圓周角必是直角。

   如右圖，圓 0 中，$\overline{AB}$ 是直徑，

   則：$\angle APB=90^0$。

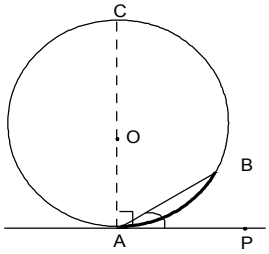


弦切角的性質：

弦切角的度數等於其兩邊所夾弧度數的一半。

如右圖，若 $\overline{PA}$ 切圓 0 於 A，$\angle PAB$ 為弦切角，

則：$\angle PAB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$。

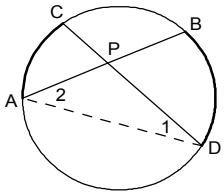


圓內角的性質：

圓內角的度數，等於此角及其對頂角所對兩弧度數和的一半。

如右圖，若 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 兩弦相交於圓內一點 P。

則：$\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$，$\angle APD=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$。

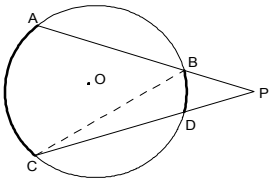


圓外角的性質：

圓外角的度數等於其所夾大弧與小弧度數差的一半。

如右圖，若直線 AB 與 CD 相交於圓 0 外一點 P，$\overset{\frown}{AC}>\overset{\frown}{BD}$

則：$\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$

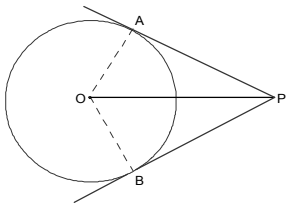


圓外切四邊形的性質：

1. 切線性質：過圓外一點 P 所作的兩條切線等長，而且 $\overline{OP}$ 平分此兩條切線的夾角。

   如右圖，若 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 為圓 0 的兩切線，A、B 為切點，

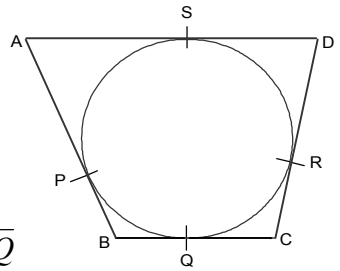
   則：$\overline{PA}=\overline{PB}$，$\angle APO=\angle BPO$。



2. 圓外切四邊形的性質：圓外切四邊形的對邊長之和相等。

如右圖，若四邊形 $ABCD$ 的四邊分別與圓相切，

則：$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$。



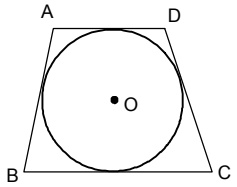
【說明】由切線性質可知，

過圓外一點向此圓所做的兩切線等長

所以 $\overline{AS}=\overline{AP}$，$\overline{DS}=\overline{DR}$，$\overline{BP}=\overline{BQ}$，$\overline{CR}=\overline{CQ}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{AB}+\overline{CD}&=\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{DR}+\overline{RC}\\&=\overline{AS}+\overline{BQ}+\overline{SD}+\overline{QC}\\&=(\overline{AS}+\overline{SD})+(\overline{BQ}+\overline{QC})\\&=\overline{AD}+\overline{BC}\end{aligned}$$

【範例】如右圖，$ABCD$ 為一等腰梯形，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=8$，$\overline{BC}=18$，若一圓 O 與它的四邊相切，則：



（1）$\overline{AB}$ 為多少?

（2）梯形 $ABCD$ 的面積為多少?

【解說】

（1） 梯形 $ABCD$ 為圓外切四邊形，設 $\overline{AB}=\overline{CD}=x$

$\therefore \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$

$\Rightarrow 2x=8+18$

$\Rightarrow x=13=\overline{AB}$

（2） 分別過 A、D 兩點作 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$、$\overline{DF}\perp\overline{BC}$

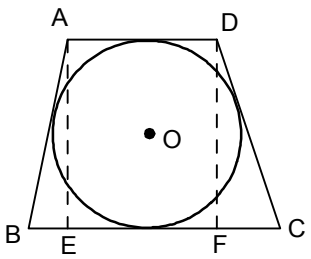
$\because \overline{BE}=\overline{CF}=\dfrac{18-8}{2}=5$

$\Rightarrow \overline{AE}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

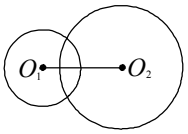
$\therefore$梯形 $ABCD$ 的面積

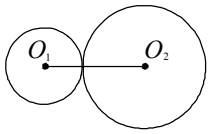
$=\dfrac{(8+18)\times 12}{2}$

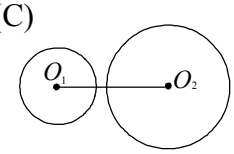
$=156$



1. 若平面上圓 O_1 及圓 O_2 的半徑各為 2 公分及 4 公分，且 $\overline{O_1O_2}=7$ 公分，則下列哪一個圖可以表示圓 O_1 與 O_2 的位置關係？【90 年第一次基測】

(A)


(B)


(C)


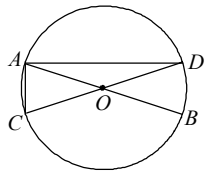
(D)

重點：判斷圓心間的距離與半徑的關係，連心線的問題。

兩圓心的連心線長 7 公分，而兩圓半徑和只有 6 公分，故兩圓外離。

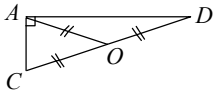
答案選（C）。

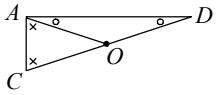
2. 如附圖，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 的兩條直徑，若 $\angle ACD=2\angle AOC$，且圖 O 的半徑為 30 公分，$\angle BOC$ 所對的弧長是多少公分？【90 年第一次基測】



(A) 10π　(B) 12π　(C) 20π　(D) 24π

重點：圓心角所對應的弧長，圓心角與弧長的關係。





設 $\angle AOC=x$，則 $\angle ACD=2x=\angle OAC$

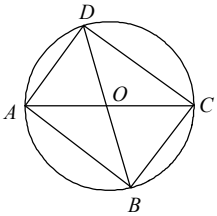
在 $\triangle OAC$ 中，$x+2x+2x=180^\circ \Rightarrow 5x=180^\circ \Rightarrow x=36^\circ$

$\angle BOC=180^\circ-36^\circ=144^\circ$，

$\therefore$ $\angle BOC$ 之弧長 $=(2\times30\times\pi)\times\dfrac{144^\circ}{360^\circ}=24\pi$

答案選（D）

3. 如圖(一)，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 是圓 O 的直徑，且 $\angle COD>\angle AOD$，則下列哪一種幾何圖形<u>沒有</u>出現在圖形中？【90 年第二次基測】



(A) 矩形　(B) 直角三角形　(C) 等腰三角形　(D) 等腰直角三角形

重點：半圓含直角、半徑皆等長，圓周角的性質。

(1) Θ $\overline{BD}$ 為直徑，$\therefore$ $\angle DAB=90^\circ=\angle ABC=\angle DCB=\angle ACD$。

$\triangle DAB$ 為直角三角形

(2) Θ $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=90^\circ$，

$\therefore$ $ABCD$ 為矩形

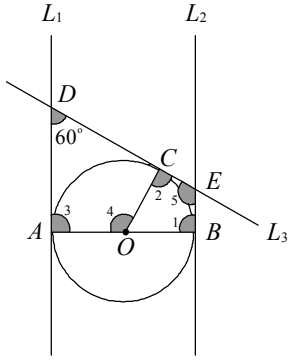
(3) Θ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$，

$\therefore$ $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$、$\triangle DOA$ 均為等腰三角形

答案選（D）

4. 如附圖，平面上三條直線 L_1、L_2、L_3 分別切圓 O 於 A、B、C 三點，且 L_1 與 L_2 分別交 L_3 於 D、E 兩點。若 $\angle ADC = 60°$，則下列哪一個選項是正確的？【90 年第二次基測】

(A) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$　(B) $\angle 3 + \angle 4 = 180°$　(C) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$　(D) $\angle 1 + \angle 5 = 180°$



重點：圓與切線

$\because L_1$、L_2、L_3 皆為圓 O 之切線，$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 90^\circ$。

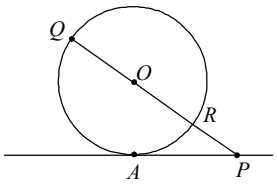
連接 $\overline{OE}$，則可得知 $\angle 4 = \angle 2 + \angle OEC > 90^\circ \Rightarrow \angle 3 + \angle 4 > 180^\circ$

$\Rightarrow \angle 2 + \angle 4 > 180^\circ$

$\angle 5 = 360^\circ - \angle 1 - \angle 3 - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle 1 + \angle 5 = 90^\circ + 120^\circ = 210^\circ > 180^\circ$

答案選（A）

5. 如附圖，直線 AP 切圓 O 於 A 點，且圓 O 的半徑長為 6，$\overline{PQ} = 16$。若有一直線 L 與圓心距離 $= \overline{AP} - \overline{PR}$，則直線 L 與圓 O 有幾個交點？【90 年第二次基測】

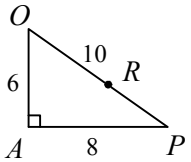


(A) 2　(B) 1　(C) 0　(D)無法確定

重點：有圓和切線時，必有垂線。

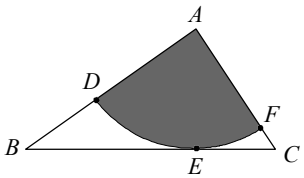
$\because \overline{AP} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$，$\therefore \overline{AP} - \overline{PR} = 8 - 4 = 4 < 6$

(圓心距 < 圓半徑)，L 是圓 O 的割線。



答案選（A）

6. 如圖(十)，ABC 中，$\angle BAC = 90°$，$\overline{AC} = 3$，$\overline{AB} = 4$，以 A 為圓心作一圓弧，切 $\overline{BC}$ 於 E 點，且分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 D、F 兩點。請問此圖形灰色部分的面積為多少？

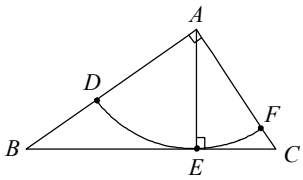


圖(十)

(A) $\frac{9}{25}\pi$　(B) $\frac{16}{25}\pi$　(C) $\frac{24}{25}\pi$　(D) $\frac{36}{25}\pi$　【90 年第二次基測】

重點：圓切三角形一邊

利用△ABC 的面積求 $\overline{AE}$



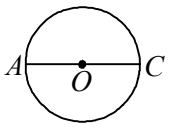
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AE}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AE} \quad \Rightarrow \overline{AE} = \frac{12}{5}$

$\therefore$ 扇形 ADF 面積 $= (\frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \pi) \times \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{12 \times 12}{25}\pi \times \frac{1}{4} = \frac{36}{25}\pi$

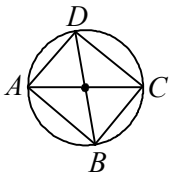
答案選（D）

7. 如圖(十五)，$\overline{AC}$ 是圓 O 的直徑，試問下列四個尺規作圖的方法中，哪一個<u>無法確定</u>作出的四邊形 $ABCD$ 為矩形？【90 年第二次基測】



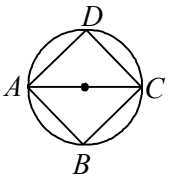
圖(十五)

(A) 如圖(十六)，任意再作一條直徑 $\overline{BD}$，連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$



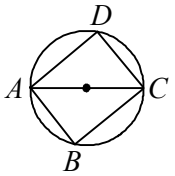
圖(十六)

(B) 如圖(十七)，分別在上下兩個半圓上取 B、D 兩點，使得 $\angle DAC = \angle BAC$，連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$



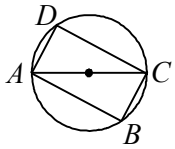
圖(十七)

(C) 如圖(十八)，分別在上下兩個半圓上取 B、D 兩點，使得 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$



圖(十八)

(D) 如圖(十九)，分別在上下兩個半圓上取 B、D 兩點，使得 $\overline{AB} // \overline{DC}$，連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$

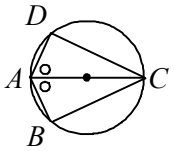


圖(十九)

重點：半圓上的直角

(A) 4 個角都是「對半圓的直角」

(B) B、D 的位置可取偏，可以不在中間，畫成如右圖所示。



(C) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

則 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 符合平行四邊形要求

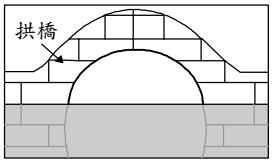
且 $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ (Θ 相加為 180°)

(D) 得 $\overline{AB} // \overline{DC}$，則 $\overline{AD} = \overline{BC}$，如同 (C) 狀況

答案選 (B)

8. 右圖為一拱橋的側面圖，其拱橋下緣呈一弧形，若洞頂為橋洞的最高點，且知當洞頂至水面距離為90公分時，量得洞內水面寬為240公分。後因久旱不雨，水面位置下降，使得拱橋下緣呈現半圓，這時，橋洞內的水面寬度變為多少公分？

(A) 240　(B) 250　(C) 260　(D) 270　【91 年第一次基測】



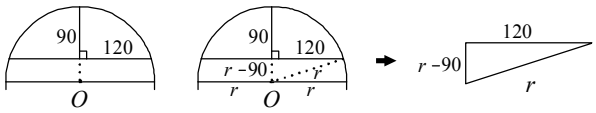
重點：半徑、弦心距及$\frac{1}{2}$弦長：三者的直角三角形關係

依題意將原圖換為如右圖：

可得到一個r的關係式：$r^2=(r-90)^2+120^2$

$\Rightarrow\ r^2=(r^2-180r+8100)-14400$

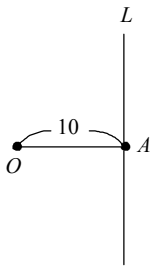
$\Rightarrow\ 180r=22500\ \Rightarrow\ r=125$



答案選（B）

9．如附圖，直線L與$\overline{OA}$垂直，垂足為A，$\overline{OA}=10$。現以O為圓心，r為半徑作一圓，請問當r為下列哪一個值時，可使L為此圓的割線？【91 年第二次基測】

(A) 5　(B) 8　(C) 10　(D) 13



重點：作圓概念：不相交、相交、切線、割線，兩圓位置與連心線的關係。

當r大於10的時候，可使L為此圓的割線

答案選（D）

10. 在直徑為a的圓上依逆時針方向取A、B、C、D四點。已知$\overline{AB}//\overline{DC}$，$\overline{AB}\neq\overline{DC}$，且$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於$P$點。請問下列哪一個選項是正確的？【91 年第二次基測】

(A) $\overline{AC}=\overline{BD}$　(B) $\overline{AP}=\overline{CP}$　(C) $\overline{AC}=a$　(D) $\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})=a$

重點：等腰梯形、全等三角形

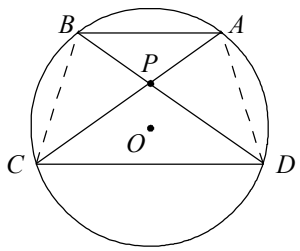
如右圖，A、B、C、D為圓上四點，

且$\overline{AB}//\overline{DC}$

$\Rightarrow\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}\ \Rightarrow\ \angle BDC=\angle ACD$　Λ　(1)

又$\angle DAC=\angle CBD$(圓周角相等)　Λ　(2)

且$\overline{CD}=\overline{CD}$　Λ　(3)



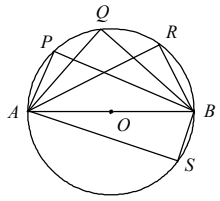
因此由(1)，(2)，(3)可得$\triangle ACD\cong\triangle BDC$($AAS$全等三角形)

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{BD}$

答案選（A）

11. 如附圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，P、Q、R、S 為圓上相異四點。下列敘述何者正確？

(A) $\angle APB$ 為銳角　(B) $\angle AQB$ 為直角　(C) $\angle ARB$ 為鈍角　(D) $\angle ASB < \angle ARB$



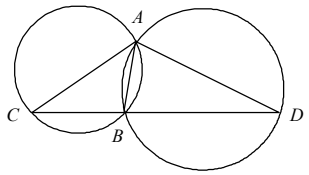
重點：半圓上的直角　【92 年第一次基測】

$\because \overline{AB}$ 為直徑

$\therefore \angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB = 90^\circ$

答案選（B）

12. 如附圖，兩圓相交於 A、B 兩點。若 C、B、D 三點共線，$\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$，$\overset{\frown}{ABC} = 160^\circ$，則 $\overset{\frown}{ABD} =$？【92 年第二次基測】



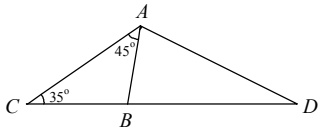
(A) 100°　(B) 160°　(C) 200°　(D) 280°

重點：圓周角所對應的弧度，圓周角的性質。

(1) $\overset{\frown}{BC} = 90^\circ \Rightarrow \angle CAB = 45^\circ$

$\overset{\frown}{ABC} = 160^\circ \quad \therefore \overset{\frown}{AB} = 70^\circ$

$\Rightarrow \angle C = 35^\circ$（如圖(一)）

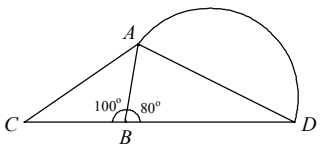


圖(一)

(2) $\angle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 35^\circ = 100^\circ$

$\therefore \angle ABD = 80^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 160^\circ$（如圖(二)）

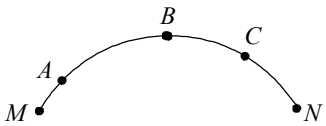


圖(二)

(3) $\overset{\frown}{ABD} = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$

答案選（C）

13. 如附圖，圓弧上有五個點，A、B、C、M、N。比較 $\angle MAN$、$\angle MBN$、$\angle MCN$ 的大小關係，下列敘述何者正確？【93 年第一次基測】



(A) $\angle MBN = \angle MCN = \angle MAN$

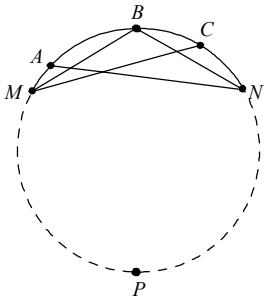
(B) $\angle MBN > \angle MCN > \angle MAN$

(C) $\angle MAN > \angle MCN > \angle MBN$

(D) $\angle MAN = \angle MCN < \angle MAN$

重點：弧及所夾弧的圓心角的基本意義

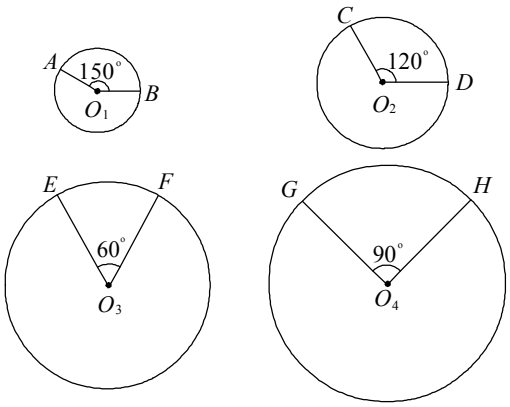
作完整之圓，如右圖



$\angle MAN = \angle MBN = \angle MCN = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MPN}$

答案選（A）

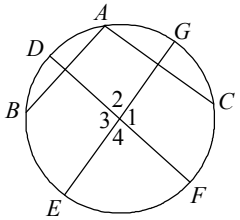
14. 如附圖，平面上圖 O_1、圓 O_2、圓 O_3、圓 O_4 的半徑分別為 1、2、3、4。
請問圖中 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{GH}$ 四個劣弧中，哪一個弧的度數最大？【93 年第二次基測】
(A) $\overset{\frown}{AB}$　(B) $\overset{\frown}{CD}$　(C) $\overset{\frown}{EF}$　(D) $\overset{\frown}{GH}$



重點：圓心角
$\because \overset{\frown}{AB}=150°$，$\overset{\frown}{CD}=120°$，$\overset{\frown}{EF}=60°$，$\overset{\frown}{GH}=90°$
$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 最大
答案選（A）

※ 請閱讀下列的敘述後，回答第 15 題和第 16 題：

如附圖有一半徑為 3 的圓，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{DF}$、$\overline{EG}$ 為此圓的四條弦，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 為 $\overline{DF}$ 與 $\overline{EG}$ 相交所成的角。
已知 $\overline{DF}$ 垂直平分 $\overline{AB}$、$\overline{EG}$ 垂直平分 $\overline{AC}$。
【93 年第二次基測】



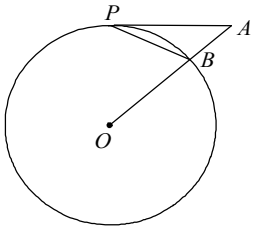
15. 若 $\overset{\frown}{CAB}=150°$，則 $\angle 2=$？
(A) 60°　(B) 75°　(C) 80°　(D) 90°

重點：半徑(直徑)會垂直平分弦線
$\because \overset{\frown}{CAB}=150°$
$\therefore \overset{\frown}{BEC}=360^0-150^0=210^0$
$\Rightarrow \angle BAC=105^0$
$\Rightarrow \angle 2=360^0-90^0-90^0-105^0=75^0$　答案選（B）

16. $\overline{DF}^2+\overline{EG}^2=$？
(A) 12　(B) 24　(C) 36　(D) 72

重點：弦的中垂線必過圓心
$\because \overline{DF}$ 與 $\overline{EG}$ 為直徑，
$\therefore \overline{DF}=\overline{EG}=2\times 3=6$。
$\therefore \overline{DF}^2+\overline{EG}^2=6^2+6^2=36+36=72$
答案選（D）

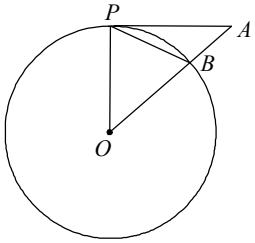
17. 如附圖，$\overline{AP}$ 為圓 O 的切線，P 為切點，$\overline{OA}$ 交圓 O 於 B 點。若 $\angle A = 40°$，則 $\angle APB =$？【94 年第二次基測】



(A) 40°　(B) 30°　(C) 25°　(D) 20°

重點：切線與半徑的交角為直角

連接 $\overline{OP}$，$\angle APB = \frac{1}{2} \times \overset{\frown}{BP}$

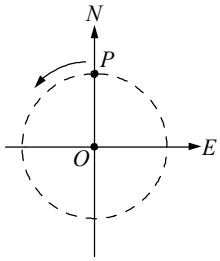


$\because$ $\overline{AP}$ 為圓 O 之切線，$\therefore$ $\angle OPA = 90^{\circ}$，又 $\angle A = 40^{\circ}$

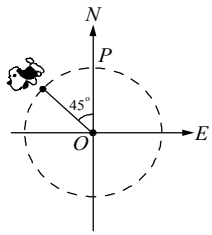
$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{BP} = \angle POA = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 40^{\circ} = 50^{\circ}$

$\Rightarrow$ $\angle APB = \frac{1}{2} \times \overset{\frown}{BP} = \frac{1}{2} \times 50^{\circ} = 25^{\circ}$　　答案選（C）

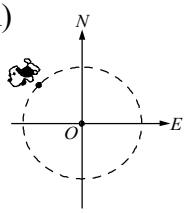
18. 如右圖（一），P 點在 O 點正北方。一機器狗從 P 點依逆時針方向繞著 O 點作等速圓周運動，經過 1 分鐘，其位置如右圖（二）所示。若經過 101 分鐘，則機器狗的位置可用下列哪一個圖形表示？

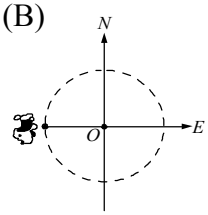


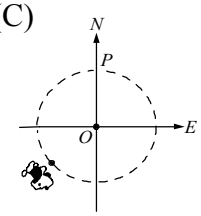
圖（一）

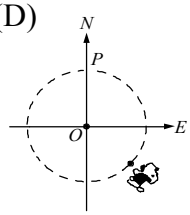


圖（二）

(A)


(B)


(C)


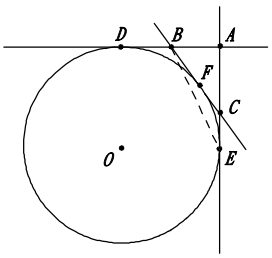
(D)


重點：圓心角　　【94 年第二次基測】

一週期可視為 8 分鐘　　Θ $360^{\circ} \div 45^{\circ} = 8$，$\therefore 101 \div 8 = 12$ K 5

答案選（D）

19. 如附圖，ΔABC 中，$\overline{AB} = 3$，$\overline{AC} = 4$，$\overline{BC} = 5$。若三直線 AB、AC、BC 分別與圓 O 切於 D、E、F 三點，則 $\overline{BE} =$？【95 年第一次基測】



（A）6（B）$\frac{25}{3}$　（C）$\sqrt{45}$　（D）$\sqrt{72}$

重點：圓形的幾何推理與計算、公切線、畢氏定理。

$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$，又 $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE}$

Θ C 為 $\overline{AE}$、$\overline{BC}$ 兩切線交點，$\therefore$ $\overline{CE} = \overline{CF}$。

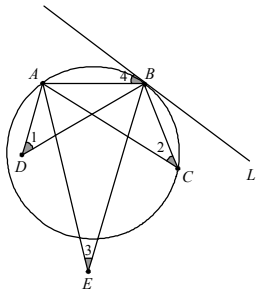
Θ B 為 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 兩切線交點，$\therefore$ $\overline{BD} = \overline{BF}$。$\Theta$ $AEOD$ 為正方形。

$2\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BD} + \overline{CE} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BF} + \overline{CF} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$

$= 3 + 4 + 5 = 12$，$\therefore$ $\overline{AE} = 6$，$\therefore$ $\overline{BE} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$

答案選（C）

20. 如附圖，A、B、C 三點在圓上，D 點在圓內，E 點在圓外，L 為過 B 點之切線。根據圖中 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 的位置，判斷下列哪一個角的角度最大？【95 年第一次基測】



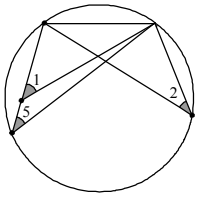
（A）$\angle 1$　（B）$\angle 2$　（C）$\angle 3$　（D）$\angle 4$

重點：圓周角與外角、圓與切線之夾角

參考圖（A）：D 為圓內點

$\Theta\ \angle 1 > \angle 5$ 且 $\angle 5 = \angle 2$

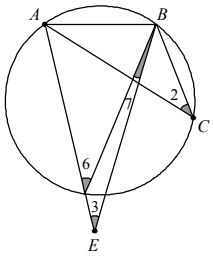
$\therefore\ \angle 1 > \angle 2$



圖(A)

參考圖（B）：$\Theta\ \angle 3 = \angle 6 - \angle 7$ 且 $\angle 6 = \angle 2$

$\therefore\ \angle 2 > \angle 3$



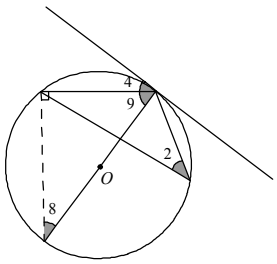
圖(B)

參考圖（C）：$\Theta\ \angle 4 + \angle 9 = 90^\circ$ 且 $\angle 8 + \angle 9 = 90^\circ$

$\therefore\ \angle 4 = \angle 8$　　又 $\Theta\ \angle 2 = \angle 8$

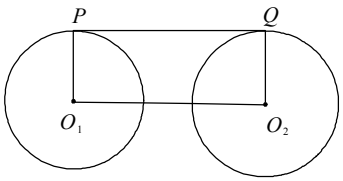
$\therefore\ \angle 2 = \angle 4$　　$\therefore \angle 1 > \angle 2 = \angle 4 > \angle 3$

答案選（A）



圖(C)

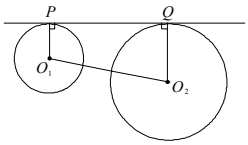
21. 如附圖，圓 O_1、圓 O_2 為大小不同的兩圓，且 P、Q 分別為圓上的一點。若 $\overline{PQ}$ 是兩圓的公切線，則下列敘述何者正確？【95 年第二次基測】



(A) $\overline{PQ} \parallel \overline{O_1O_2}$　　(B) $\overline{PO_1} \parallel \overline{QO_2}$

(C) $\overline{PO_1} \perp \overline{O_1O_2}$　　(D) $\overline{QO_2} \perp \overline{O_1O_2}$

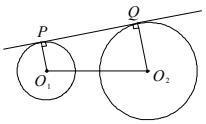
重點：圓形的公切線



Q $\overline{PQ}$ 是兩圓的公切線，

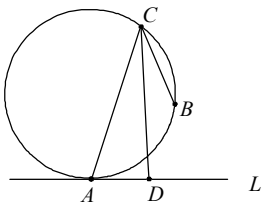
$\therefore\ \overline{PO_1} \perp \overline{PQ}$ ，$\overline{QO_2} \perp \overline{PQ}$

$\Rightarrow\ \overline{PO_1} \parallel \overline{QO_2}$ (如右兩圖為較明顯的大小不同之兩圓)



答案選（B）

22. 如附圖，圓上有 A 、 B 、 C 三點，直線 L 與圓相切於 A ，$\overline{CD}$ 為 $\angle ACB$ 的角平分線，且與 L 交於 D 點。若 $\overset{\frown}{AB}=80^{\circ}$ ，$\overset{\frown}{BC}=60^{\circ}$ ，則 $\angle ADC=$ ？【95 年第二次基測】



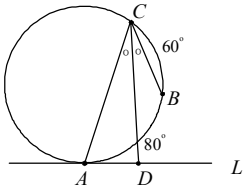
(A) 80°　(B) 85°　(C) 90°　(D) 95°

重點：圓周角

$\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 80^{\circ}=40^{\circ}$ (圓周角)

$\therefore\ \angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times 40^{\circ}=20^{\circ}$

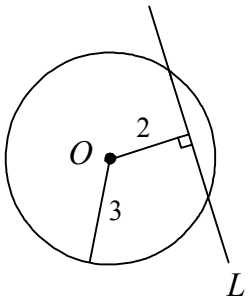
$\angle CAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\times(60^{\circ}+80^{\circ})=70^{\circ}$ (圓周角)



Q ΔACD 之內角和為 180° ，$\therefore\ \angle ADC=180^{\circ}-20^{\circ}-70^{\circ}=90^{\circ}$

答案選（C）

23. 圓 O 與直線 L 在同一平面上。若圓 O 半徑為 3 公分，且其圓心到直線 L 的距離為 2 公分，則圓 O 和直線 L 的位置關係為何？



(A) 不相交　(B) 相交於一點　(C) 相交於兩點　(D) 無法判斷

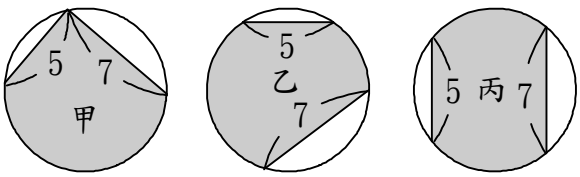
重點：圓與直線的位置關係　【96 年第一次基測】

因為圓 O 半徑為 3 公分＞圓心到直線 L 的距離 2 公分

如右圖所示，即可推得答案為(C)

答案選（C）

24. 圖（二）有三個大小相同的圓，其中各有長度分別為 5、7 的兩弦，且甲、乙、丙分別是各圓與其兩弦形成的灰色區域。根據圖中圓與弦的位置，判斷甲、乙、丙面積的大小關係為何？【96 年第二次基測】



圖(二)

（A）甲＞乙＞丙　（B）甲＞丙＞乙　（C）甲＞乙＝丙　（D）甲＝乙＝丙

重點：弧弦的關係

因三圓的兩弦接相等，故兩弓形面積一樣

且三圓大小面積相同，所以甲、乙、丙面積相同

答案選（D）

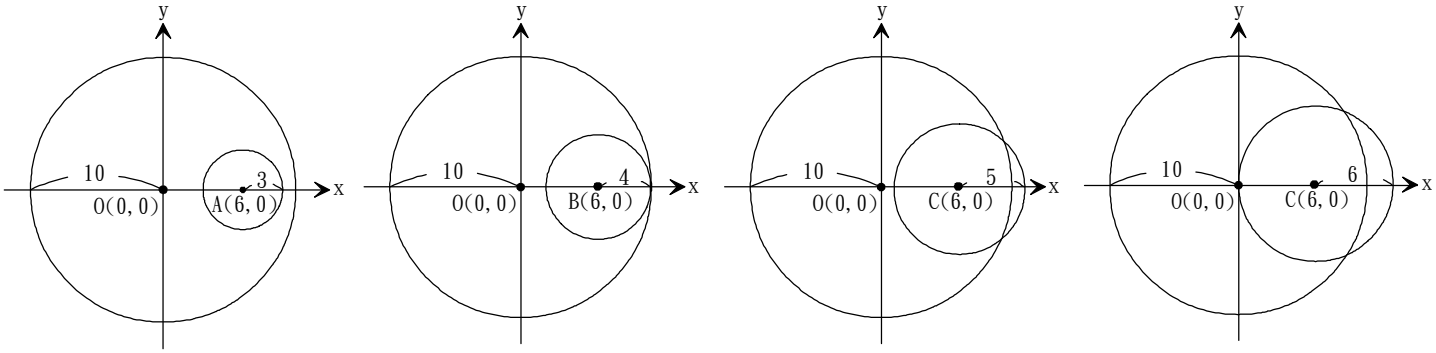
25. 在坐標平面上有五個圓，其圓心坐標與半徑如表（一）所示，則下列哪一個圓與圓 O 沒有交點？

（A）圓 A　（B）圓 B　（C）圓 C　（D）圓 D

重點：兩圓的位置關係　　【96 年第二次基測】

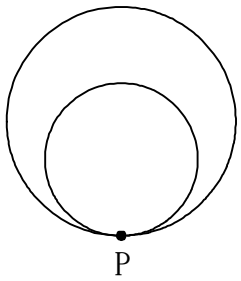
	圓心坐標	半徑
圓 O	(0,0)	10
圓 A	(6,0)	3
圓 B	(6,0)	4
圓 C	(6,0)	5
圓 D	(6,0)	6

表(一)



答案選（A）

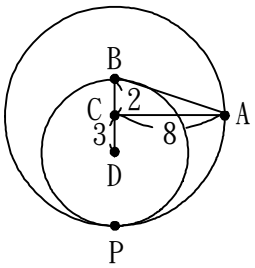
26. 如圖（十三），大、小兩圓內切於 P 點。今甲、乙兩人分別自 P 點出發，甲沿著大圓圓周，走了 $\frac{1}{4}$ 大圓周長到達位置 A；乙沿著小圓圓周，走了 $\frac{1}{2}$ 小圓周長到達位置 B。若兩圓的半徑分別為 8m、5m，則 $\overline{AB}$ ＝？【96 年第二次基測】



圖(十三)

（A）3m　（B）$\sqrt{39}$ m　（C）$\sqrt{68}$ m　（D）$\sqrt{89}$ m

重點：弦與弦心距的關係



設大圓的圓心為 C，小圓的圓心為 D

$\because \overline{CP}=8$，$\overline{DP}=5$

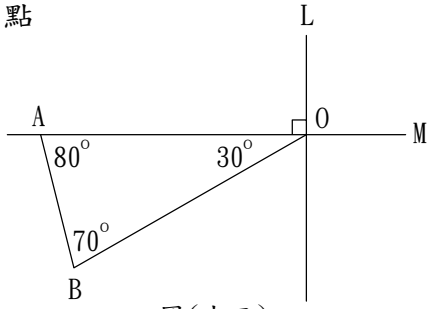
$\therefore \overline{CD}=3$，$\overline{AC}=2$

$\Rightarrow\ \overline{AB}^2=8^2+2^2=64+4=68$

$\Rightarrow\ \overline{AB}=\sqrt{68}$

答案選（C）

27. 圖（十五）的兩直線 L 、M 互相垂直，交於 O 點，且 A 點在 M 上。若在 L 上找一點 P ，使得 $\angle OPA=\angle OBA$ ，則下列作法中，哪一個是正確的？



圖(十五)

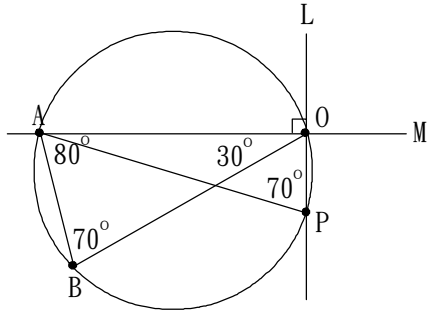
(A) 作 $\overline{OB}$ 的中垂線，交 L 於 P 點

(B) 作 ΔABO 的外接圓，交 L 於 P 點

(C) 過 B 作一直線垂直 L ，交 L 於 P 點

(D) 作 $\angle OAB$ 的角平分線，交 L 於 P 點

重點：圓周角與弦切角的關係　【96 年第二次基測】



作 ΔABO 的外接圓，交 L 於 P 點

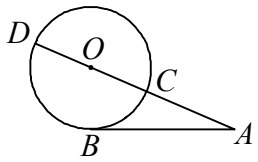
$\because \angle OAB=70^\circ \quad \therefore \overset{\frown}{AO}=2\times 70^\circ=140^\circ$

$\because \angle OAB$ 與 $\angle OPA$ 所對應的弧皆為 $\overset{\frown}{AO}$

$\therefore \angle OPA=70^\circ$

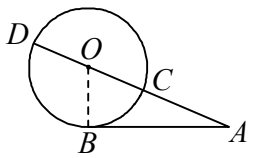
答案選（B）

28. 如圖，$\overline{AB}$ 切圓 O 於 B，$\overline{AD}$ 通過圓心且交圓 O 於 C、D 兩點，若 $\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=10$，則 $\overline{AC}=$？



(A)10　(B)9　(C)8　(D)7

重點：切線的應用



設 $\overline{AC}=x$ ，且 $\overline{CO}=\overline{BO}=5$

利用畢氏定理知 $\overline{AO}^2=\overline{BO}^2+\overline{AB}^2$

$\Rightarrow (5+x)^2=5^2+12^2 \qquad \Rightarrow 25+10x+x^2=25+144$

$\Rightarrow x^2+10x-144=0 \qquad \Rightarrow (x+18)(x-8)=0 \qquad \Rightarrow x=8\ ,\ -18$（不合）

答案選（C）

29. 若兩圓相交於相異兩點，且半徑分別為 9、15，設連心線段長為 x，則 $|x-24|+|x-6|$ 之值為多少？

(A)18　(B)17　(C)16　(D)15

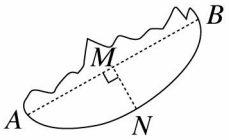
重點：兩圓之間的關係

$\because$ 兩圓相交於相異兩點　$\Rightarrow$　$15-9<x<15+9$　$\Rightarrow$　$6<x<24$

則 $|x-24|+|x-6|=24-x+x-6=18$

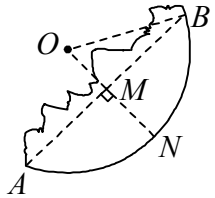
答案選（A）

30. 某高樓樓頂上的圓形看板因地震被震落而破碎，僅尋獲一小片弓形，如圖所示。今欲重做一個與原尺寸大小相同的看板，經測量得知$\overline{AB}=4m$，$\overline{MN}=1m$，M為$\overline{AB}$中點，且$\overline{MN}\perp\overline{AB}$，則此圓形看板的半徑長為多少？



(A)3.5　(B)3　(C)2.5　(D)2

重點：弦心距的性質



設此圓形看版的圓心為O，連接$\overline{OM}$、$\overline{OB}$

令$\overline{OM}=x$，則$\overline{OB}=\overline{ON}=x+1$

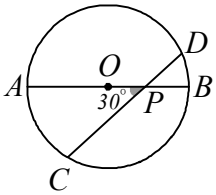
利用畢氏定理知$\overline{BO}^2=\overline{MO}^2+\overline{BM}^2$

$\Rightarrow (x+1)^2=x^2+2^2$　$\Rightarrow x^2+2x+1=x^2+4$　$\Rightarrow 2x=3$　$\Rightarrow x=1.5$

$\overline{OB}=1.5+1=2.5$　　答案選（C）

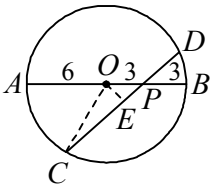
31. 如圖，圓O的直徑$\overline{AB}$＝12公分，P是$\overline{OB}$中點，若∠OPC＝30^0，則弦$\overline{CD}$的長是多少？

(A)$3\sqrt{15}$　(B)$8\sqrt{15}$　(C)$10\sqrt{15}$　(D)$12\sqrt{15}$



重點：弦心距的性質

作$\overline{OE}\perp\overline{CD}$　$\because$∠OPC＝30^0，$\therefore \overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{3}{2}$

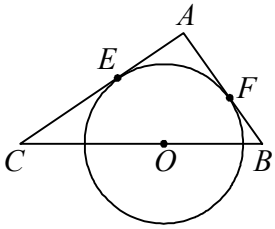


利用畢氏定理知$\overline{CE}^2=\overline{OC}^2-\overline{OE}^2$

$\Rightarrow \overline{CE}=\sqrt{6^2-(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{36-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{135}{4}}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$

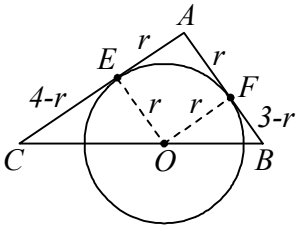
$\overline{CD}=2\times\frac{3\sqrt{15}}{2}=3\sqrt{15}$　　答案選（A）

32. 如圖，△ABC中，∠A＝90°，O點在$\overline{BC}$上，$\overline{AC}$、$\overline{AB}$分別切圓O於E、F，若$\overline{AB}$＝3、$\overline{AC}$＝4，則圓O面積為多少？



(A)$\frac{121}{49}\pi$　(B)$\frac{144}{49}\pi$　(C)$\frac{169}{49}\pi$　(D)$\frac{256}{49}\pi$

重點：圓形的相關性質之應用



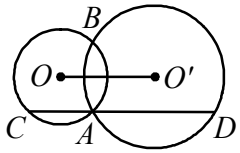
連接$\overline{OE}$、$\overline{OF}$，設$\overline{OE}=r$

ΔABC＝正方形$AEOF$＋ΔECO＋ΔFBO

$\frac{1}{2}\times 3\times 4=r^2+\frac{1}{2}\times r\times(4-r)+\frac{1}{2}\times r\times(3-r)$　$\Rightarrow r=\frac{12}{7}$

圓O面積＝$\frac{12}{7}\times\frac{12}{7}\times\pi=\frac{144}{49}\pi$　　答案選（B）

33. 如圖，圓 O 與圓 O' 相交於 A、B 兩點，今過 A 作一平行連心線 $\overline{OO'}$ 的直線，分別交兩圓於 C、D，若 $\overline{OO'}=10$，則 $\overline{CD}=$？

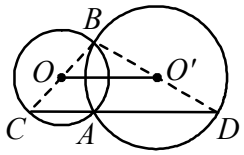


(A)8　(B)12　(C)16　(D)20

重點：圓形的相關性質之應用

連接 $\overline{BC}$、$\overline{BD}$

在 ΔBCD 中

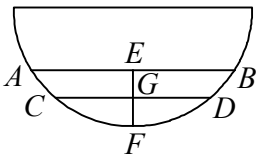


$\because \overline{OO'} // \overline{CD}$　　$\therefore \overline{BO}:\overline{BC}=\overline{OO'}:\overline{CD}$

$\Rightarrow 1:2=10:\overline{CD}$　　$\Rightarrow \overline{CD}=2\times 10=20$

答案選（D）

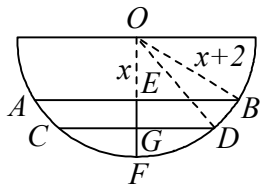
34. 有一半圓形的杯子，杯內裝有飲料，如圖所示，此時水平面寬 $\overline{AB}=8cm$，高度 $\overline{EF}=2cm$，後來庭佑喝了一口，使水平面下降 $1cm$，則此時水平面寬 $\overline{CD}$ 為多少？



(A)8cm　(B)6cm　(C)4cm　(D)2cm

重點：圓形的相關性質之應用

連接 $\overline{OE}$、$\overline{OB}$　　設 $\overline{OE}=x$，則 $\overline{OB}=x+2$



利用畢氏定理知 $\overline{OB}^2=\overline{OE}^2+\overline{BE}^2$

$\Rightarrow (x+2)^2=x^2+4^2$　　$\Rightarrow x=3$

$\overline{OG}=3+1=4$

利用畢氏定理知 $\overline{OD}^2=\overline{OG}^2+\overline{GD}^2$　　$\Rightarrow 5^2=4^2+\overline{GD}^2$　　$\Rightarrow \overline{GD}=3$

$\Rightarrow \overline{CD}=3\times 2=6$　　答案選（B）