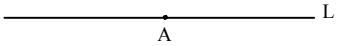
幾何與證明

【中垂線作圖】：

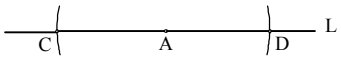
【範例】過直線上一點作此直線的垂線。



【已知】直線 L 和 L 上一點 A。

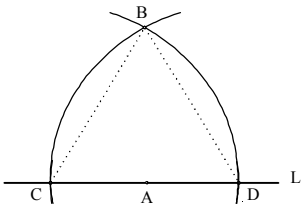
【求作】畫一直線通過 A，且與 L 垂直。

【作法】步驟一：以適當長為半徑，A 為圓心畫圓弧，交 L 於 C、D 兩點。

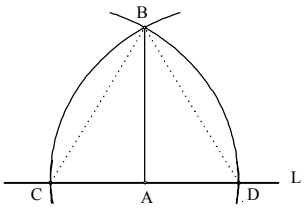


步驟二：以 $\overline{CD}$ 為半徑，C、D 為圓心畫兩圓弧，設其交點為 B（如圖一）。

步驟三：連 $\overline{AB}$，即為所求（如圖二）。



圖一

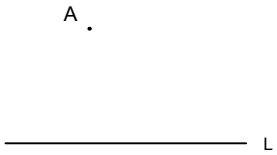


圖二

【平行線作圖】：

【範例】給定任一直線及線外一點，作出過此點且與此直線平行的直線。

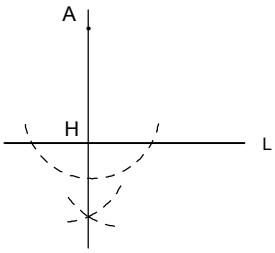
【已知】直線 L 與線外一點 A（如右圖）。



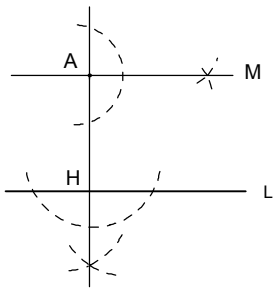
【求作】過 A 點作一平行線 M 與 L 平行。

【作法】步驟一：過 A 點作 $\overset{\text{suu}}{AH} \perp L$（如圖一）。

步驟二：過 A 點作直線 M 垂直 $\overset{\text{suu}}{AH}$，則 M//L（如圖二）。

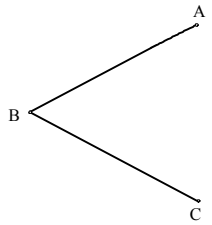


圖一



圖二

【角平分線作圖】：



【範例】給一任意角度作此角的平分線。

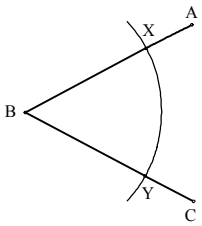
【已知】某任意角∠ABC。

【求作】∠ABC的角平分線。

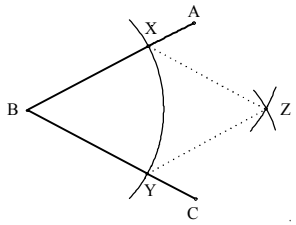
【作法】步驟一:以適當長為半徑，B 點為圓心畫弧交 $\overline{BA}$ 、$\overline{BC}$ 於 X、Y 兩點（如圖一）。

步驟二:以相同的半徑，X、Y 為圓心畫兩個圓弧，設其交點為 Z（如圖二）。

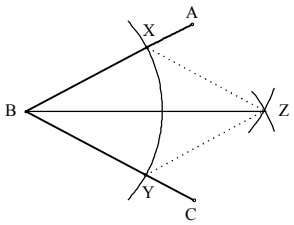
步驟三:連 $\overline{BZ}$ ，即為∠ABC 的角平分線（如圖三）。



圖一



圖二



圖三

中垂線(垂直平分線)性質：

(1)一線段的垂直平分線上任一點到線段兩端點等距離。

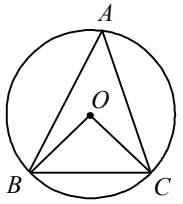
(2)與線段兩端點等距離的點在它中垂線上。

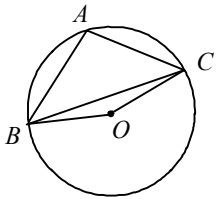
角平分線(分角線)性質：

(1)一個角的角平分線上任一點到角的兩邊等距離。

(2)與一個角的兩邊等距離的點在這個角的角平分線上。

外心的定義與性質：





1. 定義：三邊中垂線之交點。

2. 性質：(1)外心到三頂點等距離。

(2)外心即為外接圓的圓心。

(3)若 O 為 ΔABC 的外心，則：

①$\angle A$ 為銳角時，$\angle BOC = 2\angle A$ 。

②$\angle A$ 為銳角時，$\angle BOC = 306^{\circ} - 2\angle A$ 。

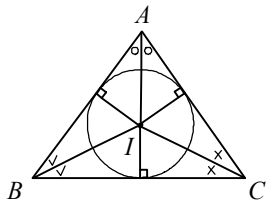
(4)三角形外心的位置

①銳角三角形：外心在三角形內部。

②直角三角形：外心在三角形斜邊中點。

③銳角三角形：外心在三角形外部。

內心的定義與性質：



1. 定義：三個角平分線之交點。
2. 性質：(1)內心到三邊等距離。

(2)內心的位置恆在三角形的內部。

(3)內心即為內切圓的圓心。

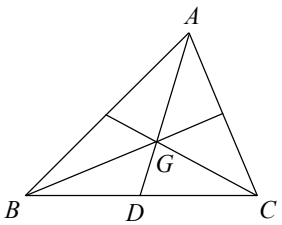
(4)設 I 為 ΔABC 的內心，則：

①三角形面積 $\triangle AIB$ ：$\triangle AIC$ ：$\triangle BIC = \overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 。

②設 $\triangle ABC$ 的周長等於 s ，其內切圓半徑等於 r ，則 $\triangle ABC = \frac{1}{2}rs$ 。

③ $\angle BIC = 90^{\circ} + \frac{1}{2}\angle A$ 。

重心的定義與性質：



1. 定義：三中線之交點。
2. 性質：(1)重心到三頂點之距離為其中線長的 $\frac{2}{3}$ 倍。

(2)重心的位置在三角形的內部。

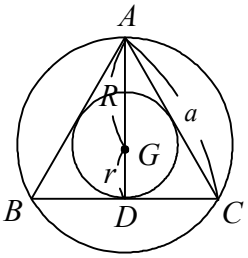
(3)設 G 為 ΔABC 的內心，則：

① $\overline{AG} = 2\overline{DG} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ 。

② $\triangle ABG = \triangle BCG = \triangle ACG = \frac{1}{3}\triangle ABC$ 。

③ $\triangle AGF = \triangle BGF = \triangle BGD = \triangle CGD = \triangle CGE = \triangle AGE = \frac{1}{6}\triangle ABC$ 。

※補充：1. 正三角形的外心、內心、重心三心在同一點上。

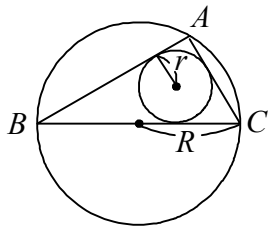


則：(1) 正三角形的高 $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) 內切圓半徑 $r = \frac{1}{3}$ 高。

(3) 外接圓半徑 $R = \frac{2}{3}$ 高。

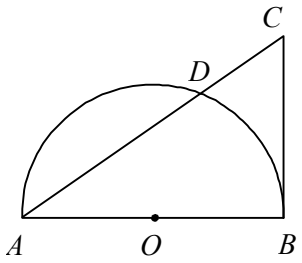
2. 直角三角形中，若 $\angle A = 90^{\circ}$ ，



則：(1) 內切圓半徑 $r = \frac{\text{兩股長之和} - \text{斜邊長}}{2}$ 。

(2) 外接圓半徑 $R = \frac{\text{斜邊長}}{2}$ 。

1. 如右圖，$\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，$\overline{BC}$ 是過 B 點之切線，D 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上。求作：在 $\overline{BC}$ 上取 P 點，使得 $\overline{AP}$ 平分△ ABC 的面積。下列有四個尺規作圖的方法，何者錯誤？【90 年第一次基測】



(A) 取 $\overline{BC}$ 的中點 P，連 $\overline{AP}$

(B) 作 $\angle A$ 之角平分線交 $\overline{BC}$ 於 P 點

(C) 作 $\overline{BD}$ 的中垂線交 $\overline{BC}$ 於 P 點，連 $\overline{AP}$

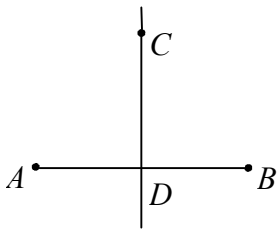
(D) 過 O 點作直線平行 $\overline{AC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 P 點，連 $\overline{AP}$

重點：要將三角形一分為 2，則必須找邊長上的中點

$\overline{AP}$ 把△ ABC 分為相等的兩部分，P 當然是 $\angle A$ 對面 $\overline{BC}$ 的中點

答案選（B）

2. 如附圖，已知直線 CD 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，且交 $\overline{AB}$ 於 D 點。則下列哪一個敘述是錯誤的？【90 年第一次基測】



(A) 以 C 為圓心，$\overline{CB}$ 為半徑畫圓，則圓必過 A 點

(B) 以 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫圓，則圓必過 C 點

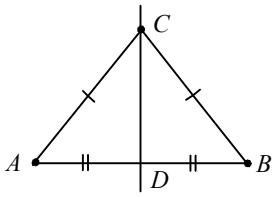
(C) 以 B 為圓心，$\overline{AC}$ 為半徑畫圓，則圓必過 C 點

(D) 以 D 為圓心，$\overline{AD}$ 為半徑畫圓，則圓必過 B 點

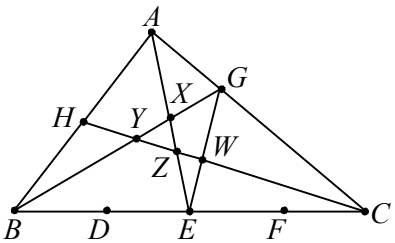
重點：作圖概念：中垂線定理

如右圖，即可判斷答案。

答案選（B）



3. 如圖(一)，△ ABC 中，D、E、F 三點將 $\overline{BC}$ 四等分，$\overline{AG}$：$\overline{AC}=1:3$，H 為 $\overline{AB}$ 之中點。下列哪一個點為△ ABC 的重心？【90 年第一次基測】



圖(一)

(A) X　(B) Y　(C) Z　(D) W

重點：重心定理

重心為三邊中線的交點，即為 $\overline{AE}$ 與 $\overline{CH}$ 之交點

$\Rightarrow$ Z 點即為重心

答案選（C）

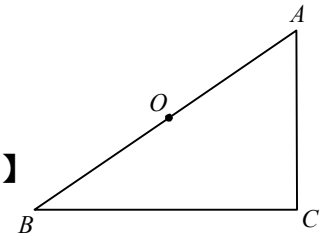
4. 如圖(十一)，已知在△ ABC 中，$\angle ACB = 90^\circ$ 且 $\overline{BC} > \overline{AC}$ 。

求作：一圓與 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 相切，且圓心 O 在 $\overline{AB}$ 上。

下列四個取得圓心 O 的作圖方法，何者正確？【90 年第一次基測】

(A) 取 $\overline{AB}$ 中點為 O　　(B) 作 $\overline{AC}$ 中垂線交 $\overline{AB}$ 於 O

(C) 作 $\overline{BC}$ 中垂線交 $\overline{AB}$ 於 O　(D) 作∠ACB 平分線交 $\overline{AB}$ 於 O

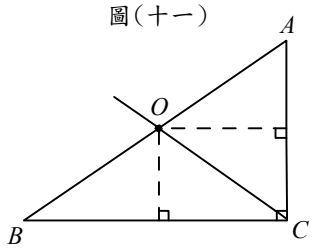


圖(十一)

重點：圓、相切　⇒　等距離　⇒　半徑就是「垂直距離」

一圓與 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 相切　⇒　就是該圓心到 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 等距離。

∴ 圓心必在 $\angle C$ 的平分線上。(已知 $\angle C = 90^\circ$，如右圖)

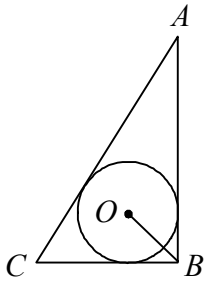


答案選（D）

5. 如圖，△ABC 為直角三角形，∠B＝90°，$\overline{AB}$ ＝8，$\overline{BC}$ ＝6，

0 為△ABC 的內切圓圓心，則 $\overline{OB}$ ＝？【90 年題本一】

(A)2　(B)$\sqrt{8}$　(C)$\frac{10}{3}$　(D)$\frac{20}{3}$

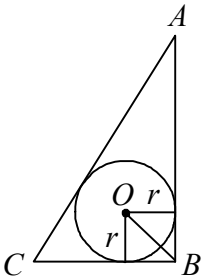


重點：三角形的內心性質

∵0 為△ABC 的內切圓圓心　∴0 為△ABC 的內心

$\Rightarrow \Delta ABC = \frac{1}{2}sr$　$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 6\times 8 = \frac{1}{2}\times(8+6+10)\times r$　$\Rightarrow r = 2$

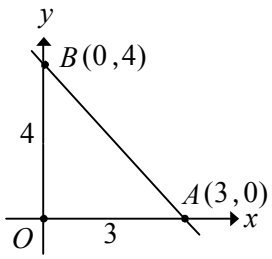
$\overline{OB} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$　答案選（B）



6. 坐標平面上直線 $4x+3y=12$ 交 x 軸於 A 點，交 y 軸於 B 點。

若 O 為原點， I 為△AOB 之內心，則△AIB 的面積＝？

(A) 2　(B)$\frac{5}{2}$　(C) 4　(D) 5　【90 年第二次基測】



圖(一)

重點：內心到三邊是「垂直」距離相等

$4x+3y=12$　⇒　

x	0	3
y	4	0

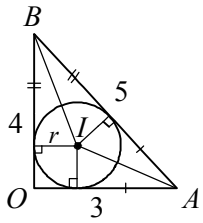
所以圖形如右圖(一)：

如右圖(二)，設圓 I 半徑 r

∵△ABO 為直角三角形　∴ $\overline{AO} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

∵ $\overline{AO} + \overline{BC} = \overline{AB} + 2r$　⇒3＋4＝5＋2r　⇒ r＝1

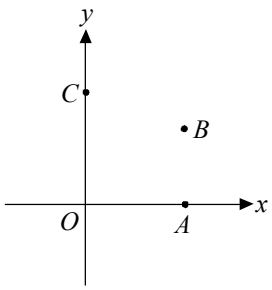
則△AIB＝$\frac{1}{2}\times 5\times 1 = \frac{5}{2}$



圖(二)

答案選（B）

7. 如右圖，在坐標平面上有 A 、 B 、 C 三點，O 是原點，$\overline{OA}\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{OA}\neq\overline{AB}$ 。今想在第一象限內找一點 D ，使得 D 到 x 軸的距離與 D 到 y 軸的距離相等，且 $\overline{DB}=\overline{DA}$ ，則 D 點要用下列何種方法求得？ 【90 年第二次基測】

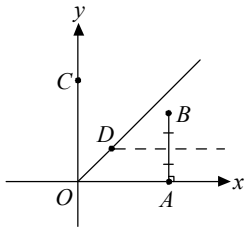


(A) 作 $\overline{AB}$ 中垂線與 $\overline{OA}$ 中垂線的交點。

(B) 作 $\overline{AB}$ 中垂線與 $\angle BAO$ 平分線的交點。

(C) 作 $\overline{AB}$ 中垂線與 $\angle COA$ 平分線的交點。

(D) 作 $\angle COA$ 平分線與 $\angle BAO$ 平分線的交點。



重點：1. 到兩邊距離相等是角平分線。

2. 到兩點距離相等是中垂線。

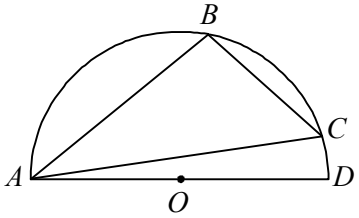
(1) 到 x 軸及到 y 軸距離一樣，則作 $\angle COA$ 角平分線，D 點在其角平分線上。

(2) $\overline{DB}=\overline{DA}$ ，則須 $\overline{AB}$ 之中垂線上任一點才會到 A 、 B 等距離。

(3) 兩線之交點即為 D 點。(D 點到 x 、 y 軸距離相同，D 點到 A 、 B 距離相同)

答案選（C）

8. 如圖(十五)，$\overline{AD}$ 是圓 O 的直徑，B 、 C 兩點在 $\overset{\frown}{AD}$ 上，如要在 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一點 M ，使得 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$ ，則下列四個作法中，哪一個是<u>錯誤</u>的？ 【91 年第一次基測】



圖(十五)

(A)作 $\angle BAC$ 之平分線交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

(B)作 $\overline{BC}$ 中垂線交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

(C)自 A 作 $\overline{BC}$ 邊的中線延長交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

(D)作 O 與 $\overline{BC}$ 邊的中點連線，延長交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

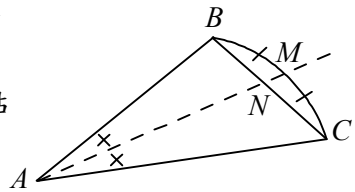
重點：若弧度相同，則所對應的角度也要相同

(A) 對，在同圓中，若圓周角相同，則所對應弧度數相同(如右圖)。

(B) 對，$\overline{BC}$ 的中垂線垂直平分 $\overset{\frown}{BC}$ (且經過圓心 O)，則 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$

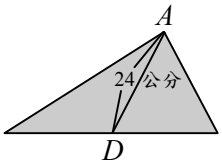
(C) 錯，$\because$ N 是 $\overline{BC}$ 中點，但延長線所交的點 M 不見得是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點

(D) 對，O 與 $\overline{BC}$ 中點連線垂直平分 $\overline{BC}$

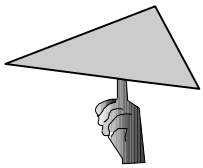


答案選（C）

9. 如圖(六)，有一質地均勻的三角形鐵片，其中一中線 $\overline{AD}$ 長 24 公分。若阿龍想用食指撐住此鐵片，如圖(七)，則支撐點應設在 $\overline{AD}$ 上的何處最恰當？【91 年第一次基測】



圖(六)


圖(七)

(A)距離 D 點 6 公分處　(B)距離 D 點 8 公分處

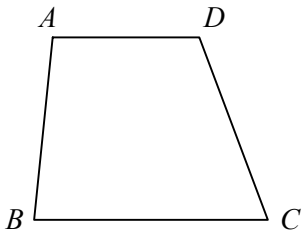
(C)距離 D 點 12 公分處　(D)距離 D 點 16 公分處

重點：三角形的重心定理

只有重心可以達成圖(七)所示，而重心距離 D 點為 $24\times\frac{1}{3}=8$

答案選（B）

10. 如圖(十六)，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AB}\neq\overline{DC}$。請問下列哪一種作圖法，可將此梯形分割為兩個面積相等的圖形？



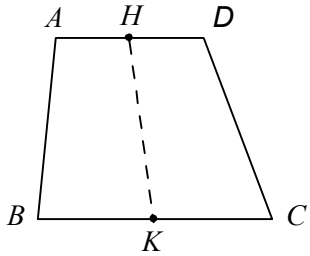
圖(十六)

(A)連接 $\overline{AC}$　(B)作 $\overline{BC}$ 的中垂線 L　【91 年第二次基測】

(C)分別取 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的中點 P、Q，連接 $\overline{PQ}$

(D)分別取 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的中點 H、K，連接 $\overline{HK}$

重點：等面積作法



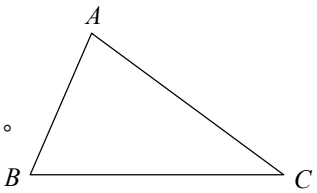
分別取 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的中點 H、K，連接 H、K

$\Theta\ \overline{AH}=\overline{HD}$、$\overline{BK}=\overline{KC}$

$\therefore$ 梯形 $AHKB$ 與梯形 $HDCK$ 面積相等(上底、下底、高皆相同)

答案選（D）

11. 如附圖，已知△ABC 中，$\overline{AB}<\overline{AC}<\overline{BC}$。



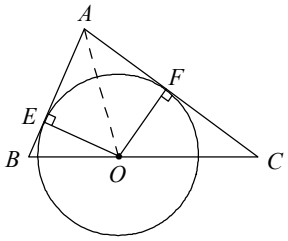
求作：一圓的圓心 O，使得 O 在 $\overline{BC}$ 上且圓 O 與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 皆相切。

下列四種作法中，哪一種是正確的？【92 年第一次基測】

(A)作 $\overline{BC}$ 的中點 O　(B)作 $\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 O 點

(C)作 $\overline{AC}$ 的中垂線，交 $\overline{BC}$ 於 O 點　(D)自 A 點作一直線垂直 $\overline{BC}$，交 $\overline{BC}$ 於 O 點

重點：角平分線定理。



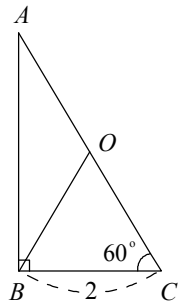
與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 相切，圓心 O 兩邊距離即為圓的半徑，如下圖。

$\because\ \overline{OE}=\overline{OF}$，$\angle OEA=\angle OFA$，$\overline{AE}=\overline{AF}$

$\therefore\triangle OEA\cong\triangle OFA$（$SAS$ 全等三角形）$\Rightarrow\ \angle OAE=\angle OAF$

答案選（B）

12. 如圖(十五)，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90^{\circ}$，O 為 $\triangle ABC$ 的外心，$\angle C = 60^{\circ}$，$\overline{BC} = 2$。若 $\triangle AOB$ 的面積 $= a$，$\triangle OBC$ 的面積 $= b$，則下列敘述何者正確？ 【92 年第一次基測】



圖(十五)

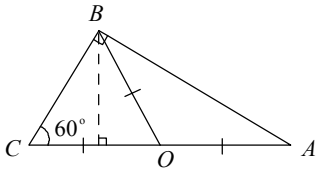
(A) $a > b$ (B) $a < b$ (C) $a - b = 0$ (D) $a + b = 4$

重點：三角形的外心到三頂點等距離

如右圖

O 為直角 $\triangle ABC$ 的外心 $\Rightarrow$ $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

將原圖形改為以 $\overline{AC}$ 當底邊，如右圖。



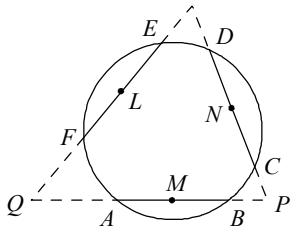
$\triangle AOB$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times$ 高

$= \frac{1}{2} \times \overline{OC} \times$ 高 $= \triangle OBC$ 面積 (等底同高)

$\therefore a = b$

答案選（C）

13. 如圖(九)，圓上三弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$，欲在圓內找一點，使其到三弦的距離相等。下列四種作法中，哪一種是正確的？ 【92 年第二次基測】



圖(九)

(A)作 $\overline{AB}$ 中垂線與 $\overline{CD}$ 中垂線的交點

(B)作 $\angle FAB$ 角平分線與 $\angle ABC$ 角平分線的交點

(C)取 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$ 三邊中點 M、N、L，作 $\overline{MN}$ 中垂線與 $\overline{ML}$ 中垂線的交點

(D)分別延長 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P，分別延長 $\overline{AB}$ 與 $\overline{EF}$ 交於 Q，作 $\angle P$ 角平分線與 $\angle Q$ 角平分線的交點

重點：到邊(弦)等距離，則想到角平分線

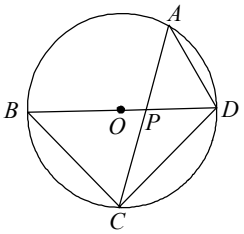
（A）該交點是到 A、B、C、D 四點等距離

（B）無意義，完全錯的作法

（C）該點到 M、N、L 三點等距離

答案選（D）

14. 如圖(二)，$\overline{BD}$ 為圓 O 的直徑，弦 $\overline{AC}$ 未過圓心 O，
則下列哪一個敘述是正確的？【93 年第一次基測】
(A) O 是△PCD 的外心　　(B) O 是△APD 的外心
(C) O 是△ACD 的外心　　(D) O 是△BCP 的外心



圖(二)

重點：外心的意義

∵外心為三角形外接圓圓心　∴O 為△ ACD 之外心

答案選（C）

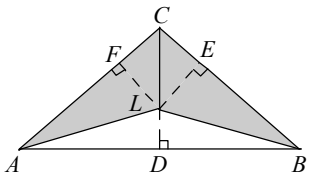
15. △ ABC 中，$\angle A=40°$，$\angle B=40°$，$\angle C=100°$。若 I 為△ABC 的內心，
則下列有關△AIB、△AIC、△BIC 之面積關係的敘述何者正確?【93 年第二次基測】
(A) △AIC 的面積＝△BIC 的面積
(B) △AIB 的面積＝△BIC 的面積
(C) △AIB 的面積＝△AIC 的面積
(D) △AIC 的面積 ＋△BIC 的面積＝△AIB 的面積

重點：內心到三邊等距離

Θ　I 為△ ABC 的內心　　∴ $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$

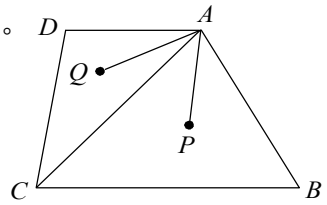
Θ $\angle A=\angle B$　　∴ $\overline{AC}=\overline{BC}$

△ AIC 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{IF}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{IE}=$△ BIC 面積



答案選（A）

16. 如圖(一)，四邊形 ABCD 中，∠B = 60°、∠DCB = 80°、∠D = 100°。
若 P、Q 兩點分別為△ABC 及△ACD 的內心，則∠PAQ =？
(A) 60°　(B) 70°　(C) 80°　(D) 90°　【94 年第一次基測】



重點：三角形的內心定理

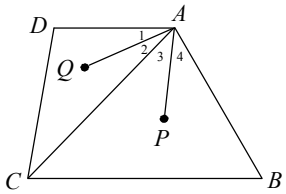
Θ ∠DAB = 360° − 60° − 80° − 100°= 120°

又 P、Q 兩點分別為△ABC 及△ACD 的內心

∴ $\angle 1=\angle 2$ ，$\angle 3=\angle 4$

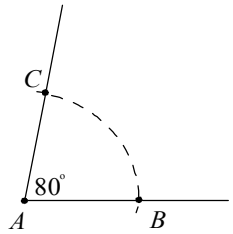
∴ $\angle PAQ=\angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle DAC+\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\times 120°=60°$



答案選（A）

17. 如右圖，有一$\angle A$及一直線L，其中$\angle A=80^\circ$，L上有一點O。

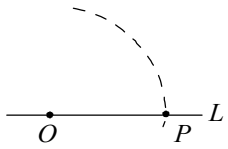


小敏想以O為頂點、L為角的一邊，作一角與$\angle A$相等。

已經進行的步驟如下：

(1) 以A為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交$\angle A$的兩邊於B、C兩點。

(2) 以O為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫弧，交L於P點。



請問小敏繼續下列哪一個步驟後，連接$\overline{OQ}$，$\angle QOP$即為所求？

(A) 以O為圓心，$\overline{AC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點

(B) 以O為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點

(C) 以P為圓心，$\overline{AC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點

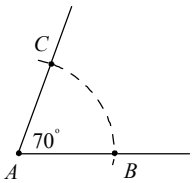
(D) 以P為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點　　【94 年第二次基測】

重點：尺規作圖(利用等角作圖)

作相同的角：(1)取相同的標準長畫弧。(2)取原角上的「開口」大小，在新角上作記號。

答案選（D）

18. 如右圖，有一$\angle A$及一直線L，其中$\angle A=70^\circ$，L上有一點O。

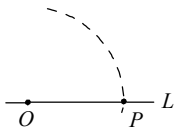


甲：以A為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交$\angle A$的兩邊於B、C兩點。

乙：以O為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫弧，交L於P點。

丙：以P為圓心，$\overline{AC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點。

丁：以P為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點。



戊：連接$\overline{OQ}$，可得$\angle QOP$。

若小名的作圖步驟為甲⇒乙⇒丙⇒戊，小芬的作圖步驟為甲⇒乙⇒丁⇒戊，

則有關於兩人所得的$\angle QOP$的敘述何者正確？【94 年第二次基測模擬試題】

(A) 兩人所得的$\angle QOP$均為70°　　(B) 小名所得的$\angle QOP$為70°，小芬為60°

(C) 兩人所得的$\angle QOP$均為60°　　(D) 小名所得的$\angle QOP$為60°，小芬為70°

重點：尺規作圖(利用等角作圖)

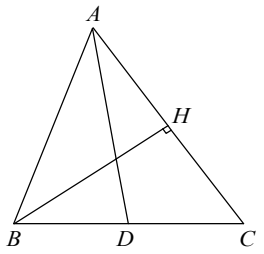
作相同的角：(1)取相同的標準長畫弧。(2)取原角上的「開口」大小，在新角上作記號。

其中小名的作法皆以$\overline{AC}$為半徑畫弧，此作為正三角形的作法，

所以小名的$\angle QOP=60^\circ$　　答案選（D）

19. 如圖（十二），$\overline{AD}$ 是△ABC 的中線，H 點在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{BH} \perp \overline{AC}$。若 $\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AC}=14$，連接 $\overline{DH}$，則 $\overline{DH}=$？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　【94 年第二次基測】



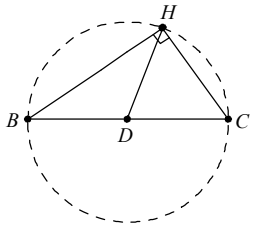
圖（十二）

重點：直角三角形的外心恰是斜邊中點

Θ △BCH 為直角三角形且 D 為斜邊 $\overline{BC}$ 之中點

∴ D 為直角△BCH 之外心

$\Rightarrow \quad \overline{DH}=\overline{DB}=\overline{DC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 10=5$

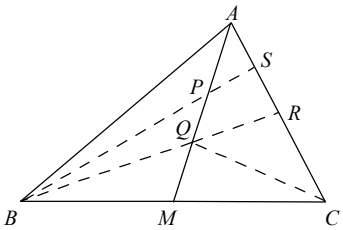


答案選（B）

20. 如圖（六），$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AC}$，$P$、$Q$ 兩點在 $\overline{AM}$ 上，其中 $\overline{AP}=\overline{PQ}$，且 Q 為 ΔABC 的重心。若兩直線 BP、BQ 與 $\overline{AC}$ 分別交於 S、R 兩點， 則下列關係何者正確？

（A）$\overline{AS}=\overline{SR}$　（B）$\overline{AR}=\overline{RC}$

（C）$\overline{QB}=\overline{QC}$　（D）$\overline{QR}=2\overline{PS}$　【95 年第一次基測】



圖(六)

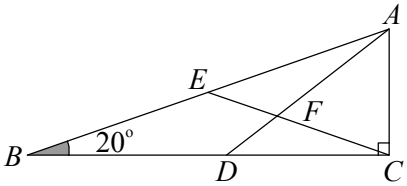
重點：重心應用 （重心定義：三角形三中線的交點）

Θ Q 為重心　∴ $\overline{BQ}$ 的延長線交 $\overline{AC}$ 於 R，R 為 $\overline{AC}$ 之中點

∴ $\overline{AR}=\overline{RC}$　答案選（B）

21. 如圖(九)，△ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，D 在 $\overline{BC}$ 上，E 為 $\overline{AB}$ 之中點，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$ 相交於 F，且 $\overline{AD}=\overline{DB}$。若 $\angle B=20^{\circ}$，則 $\angle DFE=$？【96 年第一次基測】

(A) 40°　(B) 50°　(C) 60°　(D) 70°



圖(九)

重點：外心性質的應用

Θ E 為 $\overline{AB}$ 之中點　∴ E 即為△ABC 之外心　$\Rightarrow$ $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CE}$

∴ △ABD 與△BCE 皆為等腰三角形　$\Rightarrow$ $\angle DCE=\angle EAF=20^{\circ}$

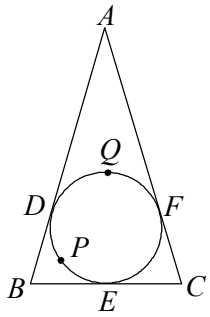
∴ $\angle CAF=\angle CAE-\angle EAF=70^{\circ}-20^{\circ}=50^{\circ}$

$\angle ACF=\angle ACD-\angle DCF=90^{\circ}-20^{\circ}=70^{\circ}$

故 $\angle DFE=\angle AFC=180^{\circ}-50^{\circ}-70^{\circ}=60^{\circ}$

答案選（C）

22. 如圖(十)，$\triangle ABC$ 的內切圓分別切 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 於 D 、 E 、 F 三點，其中 P 、 Q 兩點分別在 $\overset{\frown}{DE}$ 、 $\overset{\frown}{DF}$ 上。若 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 80^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，則 $\overset{\frown}{DPE}$ 弧長與 $\overset{\frown}{DQF}$ 弧長的比值為何？ 【96 年第一次基測】



圖(十)

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{8}{7}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$

重點：內心與內切圓之應用

如右圖，假設圓心為 O 且半徑為 r ，連接 $\overline{OD}$ 、 $\overline{OE}$ 、 $\overline{OF}$

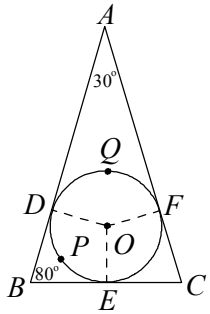
Θ 由圓的切線定理可得 $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ 、 $\overline{OE} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{OF} \perp \overline{AC}$

$\therefore \angle DOF = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ 且 $\angle DOE = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

故 $\overset{\frown}{DPE}$ 弧長與 $\overset{\frown}{DQF}$ 弧長的比值 $= (2\pi r \times \frac{100^\circ}{360^\circ}) : (2\pi r \times \frac{150^\circ}{360^\circ})$

$= 100 : 150 = 2 : 3$

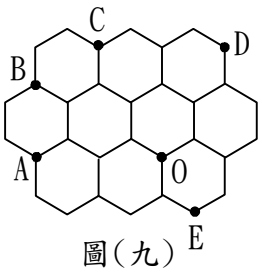
$= \frac{2}{3}$



圖(十)

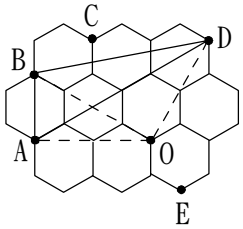
答案選（A）

23. 圖（九）是 10 個相同的正六邊形緊密排列在同一平面上的情形。根據圖中各點的位置，判斷 O 點是下列哪一個三角形的外心？
（A）△ABD （B）△BCD （C）△ACD （D）△ADE
重點：三角形的外心到三頂點的距離會相等 【96 年第二次基測】



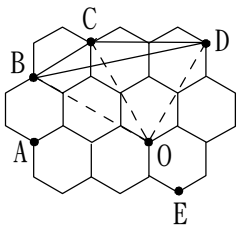
圖(九)

(A)



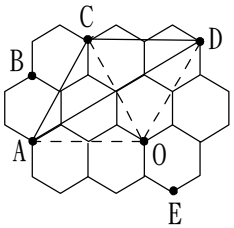
$\overline{AO} = \overline{DO} \neq \overline{BO}$

(B)



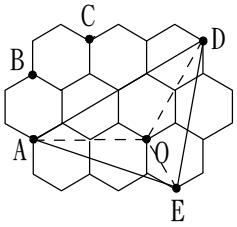
$\overline{CO} = \overline{DO} \neq \overline{BO}$

(C)



$\overline{AO} = \overline{CO} = \overline{DO}$

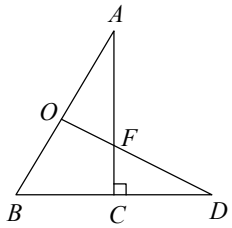
(D)



$\overline{AO} = \overline{DO} \neq \overline{EO}$

答案選（C）

24. 如圖，$\overline{AC}$ 是 $\overline{BD}$ 的中垂線，O 為 $\overline{AB}$ 中點，若 $\overline{BD}$＝6 公分，$\overline{AB}$＝5 公分，則四邊形 BCFO 的面積是多少？

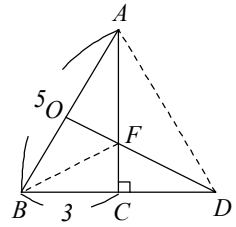


(A)4 平方公分　(B)5 平方公分　(C)6 平方公分　(D)7 平方公分

重點：三角形重心性質

因 $\overline{AC}$ 是 $\overline{BD}$ 的中垂線且 O 為 $\overline{AB}$ 中點

所以 F 為△ABC 的重心 ⇒ △BCF＝△BOF＝$\frac{1}{6}$△ABD

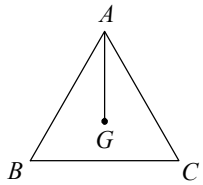


$\overline{AC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，△ABD＝$\frac{1}{2}\times6\times4=12$

⇒ 四邊形 BCFO＝△BCF＋△BOF＝$2\times\frac{1}{6}$△ABD＝$2\times\frac{1}{6}\times12$＝4

答案選（A）

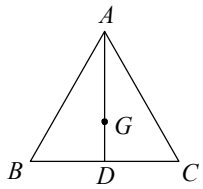
25. 如圖，正△ABC 的邊長為 3 公分，已知 G 為△ABC 的重心，則 $\overline{AG}$＝？



(A)2 公分　(B)1 公分　(C)$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 公分　(D)$\sqrt{3}$ 公分

重點：三角形重心性質

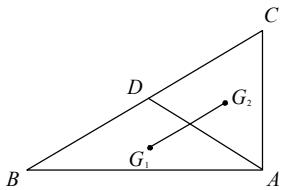
$\overline{AD}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$



因 G 為△ABC 的重心，所以 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$　⇒ $\overline{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

答案選（D）

26. 如圖，△ABC 中，∠C＝90°，D 為 $\overline{AB}$ 上一點，G_1、G_2 分別為△BCD 與△ADC 之重心，$\overline{AC}$＝9，$\overline{BC}$＝12，則 $\overline{G_1G_2}$＝？



(A)12　(B)9　(C)5　(D)3

重點：三角形重心性質

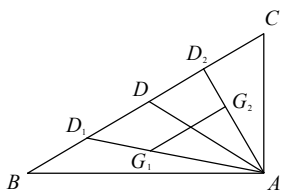
作 $\overline{AG_1}$、$\overline{AG_2}$ 分別交 $\overline{BC}$ 於 D_1、D_2

∵ G_1、G_2 為重心　∴ $\overline{AG_1}:\overline{AD_1}=\overline{AG_2}:\overline{AD_2}=2:3$

∴ $\overline{G_1G_2}\,//\,\overline{D_1D_2}$ 且 $\overline{G_1G_2}:\overline{D_1D_2}=2:3$

∵ $\overline{BC}=\sqrt{12^2+9^2}=15$

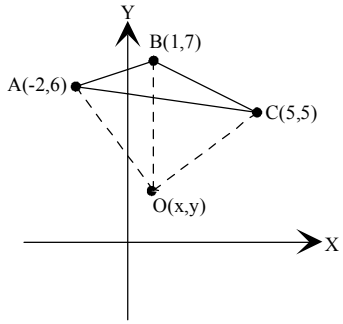
∴ $\overline{D_1D_2}=\frac{15}{2}$　⇒　$\overline{G_1G_2}=5$



答案選（C）

27. △ABC 中，A 為（－2，6），B 為（1，7），C 為（5，5），求△ABC 的外心坐標未多少？
(A)（1，3）　(B)（1，2）　(C)（2，1）　(D)（2，2）

重點：三角形的外心到三頂點距離相等



設△ABC 外心 O 的坐標為（x，y）

$\Rightarrow \overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$

則 $\begin{cases}(x+2)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y-7)^2\\(x-1)^2+(y-7)^2=(x-5)^2+(y-5)^2\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+4x+4+y^2-12y+36=x^2-2x+1+y^2-14y+49\\x^2-2x+1+y^2-14y+49=x^2-10x+25+y^2-10y+25\end{cases}$

$\begin{cases}6x+2y=10\\8x-4y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+y=5 \ \wedge\wedge \ (1)\\2x-y=0 \ \wedge\wedge \ (2)\end{cases}$

利用加減消去法，將(1)＋(2)可得：

5x＝5　⇒　x＝1　，　將 x＝1 代入(1)　，　得 y＝2

故外心坐標為（1，2）　　答案選（B）

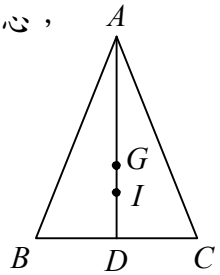
28. 承上題，△ABC 外接圓的面積為何？
(A) 25π　(B) 26π　(C) 27π　(D) 27π

重點：三角形外心性質

外接圓半徑＝$\sqrt{(1+2)^2+(2-6)^2}$ ＝5

故外接圓面積為 $5^2\times\pi=25\pi$　　答案選（A）

29. 如圖，等腰△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$、$\overline{BD}=\overline{CD}=5$，若 G 為△ABC 的重心，I 為△ABC 的內心，則 $\overline{IG}$ 的長為多少？
(A) $\frac{10}{3}$　(B) 2　(C) $\frac{5}{3}$　(D) $\frac{2}{3}$



重點：三角形重心與內心的應用

∵G 為△ABC 的重心　　∴ $\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}=4$

∵I 為△ABC 的內心　　∴△ABC＝$\frac{1}{2}$sr

$\overline{AD}=\sqrt{13^2-5^2}=12$　⇒△ABC＝$\frac{1}{2}\times10\times12=60$ 且 s＝13＋13＋10＝36

∴60＝$\frac{1}{2}\times36\times r$　⇒ r＝$\frac{10}{3}$　⇒ $\overline{IG}=\overline{GD}-\overline{ID}=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$　　答案選（D）