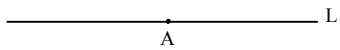
幾何與證明

【中垂線作圖】：

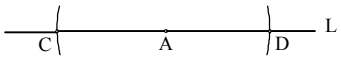
【範例】過直線上一點作此直線的垂線。



【已知】直線 L 和 L 上一點 A。

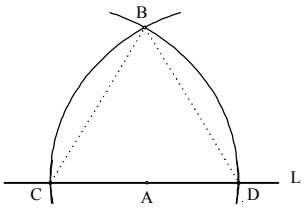
【求作】畫一直線通過 A，且與 L 垂直。

【作法】步驟一：以適當長為半徑，A 為圓心畫圓弧，交 L 於 C、D 兩點。

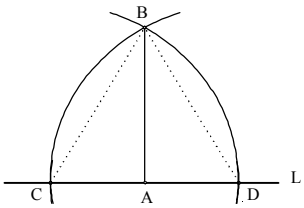


步驟二：以 $\overline{CD}$ 為半徑，C、D 為圓心畫兩圓弧，設其交點為 B（如圖一）。

步驟三：連 $\overline{AB}$，即為所求（如圖二）。



圖一

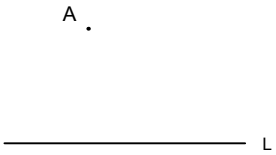


圖二

【平行線作圖】：

【範例】給定任一直線及線外一點，作出過此點且與此直線平行的直線。

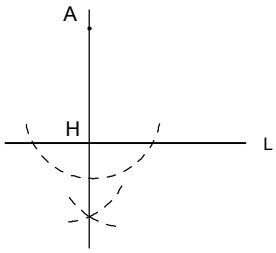
【已知】直線 L 與線外一點 A（如右圖）。



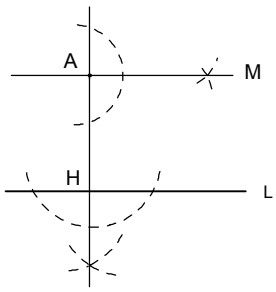
【求作】過 A 點作一平行線 M 與 L 平行。

【作法】步驟一：過 A 點作 $\overset{\text{sum}}{AH} \perp L$（如圖一）。

步驟二：過 A 點作直線 M 垂直 $\overset{\text{sum}}{AH}$，則 M//L（如圖二）。

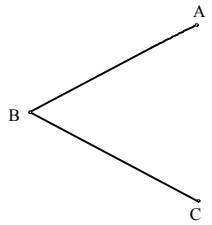


圖一



圖二

【角平分線作圖】：



【範例】給一任意角度作此角的平分線。

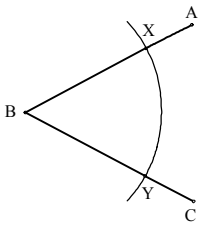
【已知】某任意角∠ABC。

【求作】∠ABC的角平分線。

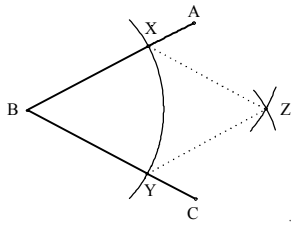
【作法】步驟一:以適當長為半徑，B 點為圓心畫弧交 $\overline{BA}$ 、$\overline{BC}$ 於 X、Y 兩點（如圖一）。

步驟二:以相同的半徑，X、Y 為圓心畫兩個圓弧，設其交點為 Z（如圖二）。

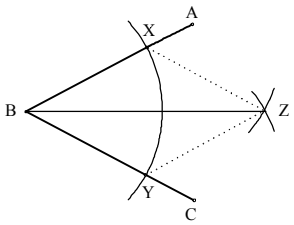
步驟三:連 $\overline{BZ}$ ，即為∠ABC 的角平分線（如圖三）。



圖一



圖二



圖三

中垂線(垂直平分線)性質：

(1)一線段的垂直平分線上任一點到線段兩端點等距離。

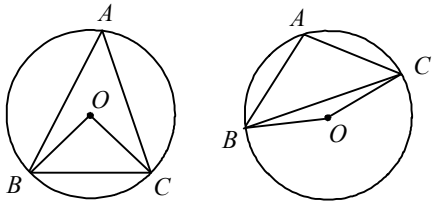
(2)與線段兩端點等距離的點在它中垂線上。

角平分線(分角線)性質：

(1)一個角的角平分線上任一點到角的兩邊等距離。

(2)與一個角的兩邊等距離的點在這個角的角平分線上。

外心的定義與性質：



1. 定義：三邊中垂線之交點。

2. 性質：(1)外心到三頂點等距離。

(2)外心即為外接圓的圓心。

(3)若 O 為 ΔABC 的外心，則：

①$\angle A$ 為銳角時，$\angle BOC = 2\angle A$ 。

②$\angle A$ 為銳角時，$\angle BOC = 306^{\circ} - 2\angle A$ 。

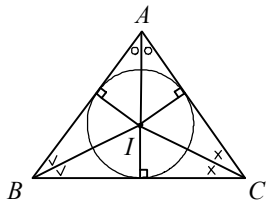
(4)三角形外心的位置

①銳角三角形：外心在三角形內部。

②直角三角形：外心在三角形斜邊中點。

③銳角三角形：外心在三角形外部。

內心的定義與性質：



1. 定義：三個角平分線之交點。
2. 性質：(1)內心到三邊等距離。

(2)內心的位置恆在三角形的內部。

(3)內心即為內切圓的圓心。

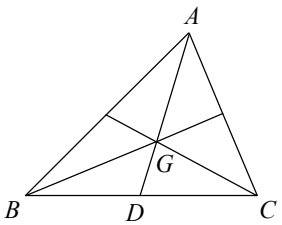
(4)設 I 為 ΔABC 的內心，則：

①三角形面積 $\triangle AIB$ ：$\triangle AIC$ ：$\triangle BIC = \overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 。

②設 $\triangle ABC$ 的周長等於 s ，其內切圓半徑等於 r ，則 $\triangle ABC = \frac{1}{2}rs$ 。

③ $\angle BIC = 90^{\circ} + \frac{1}{2}\angle A$ 。

重心的定義與性質：



1. 定義：三中線之交點。
2. 性質：(1)重心到三頂點之距離為其中線長的 $\frac{2}{3}$ 倍。

(2)重心的位置在三角形的內部。

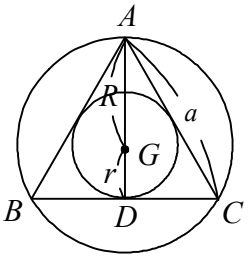
(3)設 G 為 ΔABC 的內心，則：

① $\overline{AG} = 2\overline{DG} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ 。

② $\triangle ABG = \triangle BCG = \triangle ACG = \frac{1}{3}\triangle ABC$ 。

③ $\triangle AGF = \triangle BGF = \triangle BGD = \triangle CGD = \triangle CGE = \triangle AGE = \frac{1}{6}\triangle ABC$ 。

※補充：1. 正三角形的外心、內心、重心三心在同一點上。

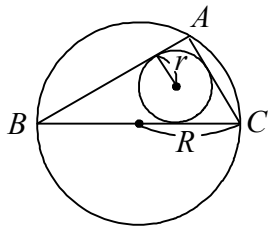


則：(1) 正三角形的高 $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) 內切圓半徑 $r = \frac{1}{3}$ 高。

(3) 外接圓半徑 $R = \frac{2}{3}$ 高。

2. 直角三角形中，若 $\angle A = 90^{\circ}$ ，



則：(1) 內切圓半徑 $r = \frac{\text{兩股長之和} - \text{斜邊長}}{2}$ 。

(2) 外接圓半徑 $R = \frac{\text{斜邊長}}{2}$ 。

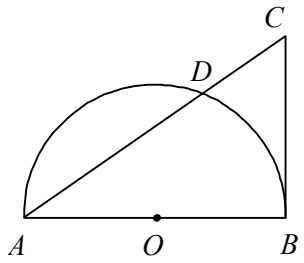
1. 如右圖，$\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，$\overline{BC}$ 是過 B 點之切線，D 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上。求作：在 $\overline{BC}$ 上取 P 點，使得 $\overline{AP}$ 平分△ ABC 的面積。下列有四個尺規作圖的方法，何者錯誤？【90 年第一次基測】

(A) 取 $\overline{BC}$ 的中點 P ，連 $\overline{AP}$

(B) 作 $\angle A$ 之角平分線交 $\overline{BC}$ 於 P 點

(C) 作 $\overline{BD}$ 的中垂線交 $\overline{BC}$ 於 P 點，連 $\overline{AP}$

(D) 過 O 點作直線平行 $\overline{AC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 P 點，連 $\overline{AP}$



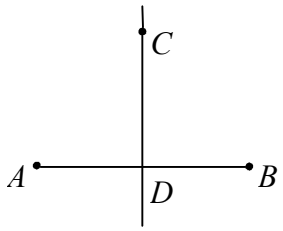
2. 如附圖，已知直線 CD 為 $\overline{AB}$ 的中垂線，且交 $\overline{AB}$ 於 D 點。則下列哪一個敘述是錯誤的？ 【90 年第一次基測】

(A) 以 C 為圓心，$\overline{CB}$ 為半徑畫圓，則圓必過 A 點

(B) 以 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫圓，則圓必過 C 點

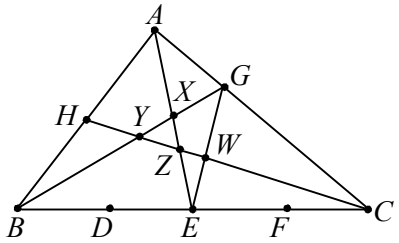
(C) 以 B 為圓心，$\overline{AC}$ 為半徑畫圓，則圓必過 C 點

(D) 以 D 為圓心，$\overline{AD}$ 為半徑畫圓，則圓必過 B 點



3. 如圖(一)，△ ABC 中，D 、E 、F 三點將 $\overline{BC}$ 四等分，$\overline{AG}$ ： $\overline{AC}$ $=1$：3，H 為 $\overline{AB}$ 之中點。下列哪一個點為△ ABC 的重心？ 【90 年第一次基測】

(A) X (B) Y (C) Z (D) W



圖(一)

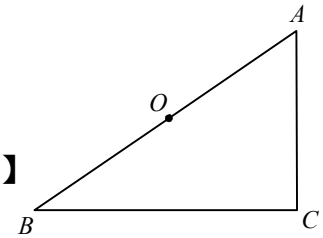
4. 如圖(十一)，已知在△ ABC 中，$\angle ACB=90^{\circ}$ 且 $\overline{BC}>\overline{AC}$ 。

求作：一圓與 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 相切，且圓心 O 在 $\overline{AB}$ 上。

下列四個取得圓心 O 的作圖方法，何者正確？【90 年第一次基測】

(A) 取 $\overline{AB}$ 中點為 O (B) 作 $\overline{AC}$ 中垂線交 $\overline{AB}$ 於 O

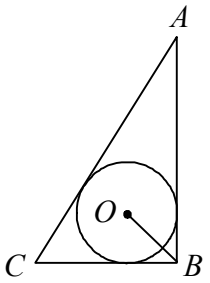
(C) 作 $\overline{BC}$ 中垂線交 $\overline{AB}$ 於 O (D) 作∠ACB 平分線交 $\overline{AB}$ 於 O



圖(十一)

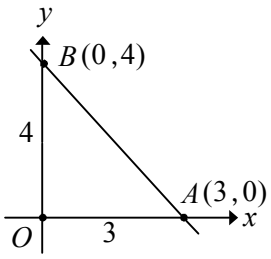
5. 如圖，△ABC 為直角三角形，∠B＝90°，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6$，O 為△ABC 的內切圓圓心，則$\overline{OB}$＝？【90 年題本一】

(A)2　(B)$\sqrt{8}$　(C)$\frac{10}{3}$　(D)$\frac{20}{3}$



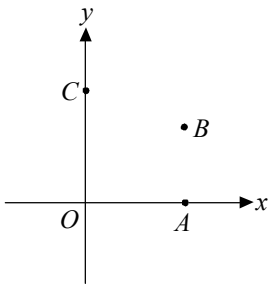
6. 坐標平面上直線$4x+3y=12$交 x 軸於 A 點，交 y 軸於 B 點。若 O 為原點， I 為△AOB 之內心，則△AIB 的面積＝？

(A) 2　(B)$\frac{5}{2}$　(C) 4　(D) 5　【90 年第二次基測】



圖(一)

7. 如右圖，在坐標平面上有 A 、 B 、 C 三點，O 是原點，$\overline{OA}\perp\overline{AB}$ 且$\overline{OA}\neq\overline{AB}$。今想在第一象限內找一點 D，使得 D 到 x 軸的距離與 D 到 y 軸的距離相等，且$\overline{DB}=\overline{DA}$，則 D 點要用下列何種方法求得？　【90 年第二次基測】



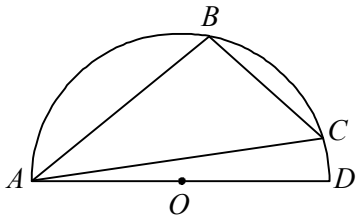
(A) 作$\overline{AB}$中垂線與$\overline{OA}$中垂線的交點。

(B) 作$\overline{AB}$中垂線與$\angle BAO$平分線的交點。

(C) 作$\overline{AB}$中垂線與$\angle COA$平分線的交點。

(D) 作$\angle COA$平分線與$\angle BAO$平分線的交點。

8. 如圖(十五)，$\overline{AD}$ 是圓 O 的直徑，B 、C 兩點在 $\overset{\frown}{AD}$ 上，如要在 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一點 M ，使得 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$ ，則下列四個作法中，哪一個是錯誤的？ 【91 年第一次基測】



圖(十五)

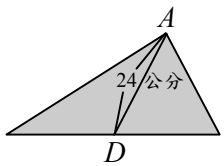
(A)作 $\angle BAC$ 之平分線交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

(B)作 $\overline{BC}$ 中垂線交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

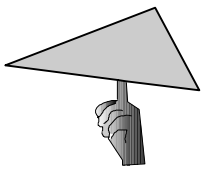
(C)自 A 作 $\overline{BC}$ 邊的中線延長交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

(D)作 O 與 $\overline{BC}$ 邊的中點連線，延長交 $\overset{\frown}{BC}$ 於 M

9. 如圖(六)，有一質地均勻的三角形鐵片，其中一中線 $\overline{AD}$ 長 24 公分。若阿龍想用食指撐住此鐵片，如圖(七)，則支撐點應設在 $\overline{AD}$ 上的何處最恰當？【91 年第一次基測】



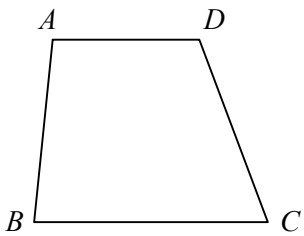
圖(六)


圖(七)

(A)距離 D 點 6 公分處 (B)距離 D 點 8 公分處

(C)距離 D 點 12 公分處 (D)距離 D 點 16 公分處

10. 如圖(十六)，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$ ，$\overline{AB}\neq\overline{DC}$ 。請問下列哪一種作圖法，可將此梯形分割為兩個面積相等的圖形？



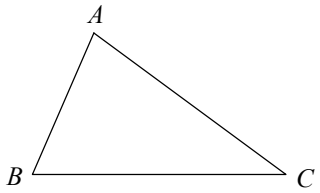
圖(十六)

(A)連接 $\overline{AC}$ (B)作 $\overline{BC}$ 的中垂線 L 【91 年第二次基測】

(C)分別取 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的中點 P、Q，連接 $\overline{PQ}$

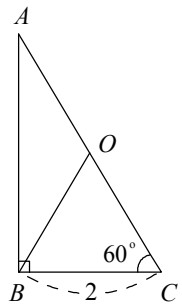
(D)分別取 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 的中點 H、K，連接 $\overline{HK}$

11. 如附圖，已知△ABC中，$\overline{AB}<\overline{AC}<\overline{BC}$。
求作：一圓的圓心O，使得O在$\overline{BC}$上且圓O與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$皆相切。
下列四種作法中，哪一種是正確的？【92 年第一次基測】



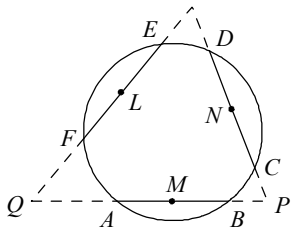
(A)作$\overline{BC}$的中點O　　(B)作$\angle A$的平分線交$\overline{BC}$於O點
(C)作$\overline{AC}$的中垂線，交$\overline{BC}$於O點　　(D)自A點作一直線垂直$\overline{BC}$，交$\overline{BC}$於O點

12. 如圖(十五)，△ABC中，$\angle ABC=90^{\circ}$，O為△ABC的外心，
$\angle C=60^{\circ}$，$\overline{BC}=2$。若△AOB的面積$=a$，△OBC的面積$=b$，
則下列敘述何者正確？【92 年第一次基測】
(A) $a>b$　(B) $a<b$　(C) $a-b=0$　(D) $a+b=4$



圖(十五)

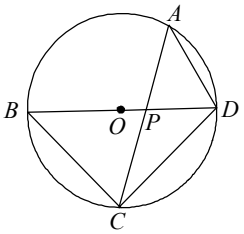
13. 如圖(九)，圓上三弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$，欲在圓內找一點，
使其到三弦的距離相等。下列四種作法中，哪一種是正確
的？【92 年第二次基測】



圖(九)

(A)作$\overline{AB}$中垂線與$\overline{CD}$中垂線的交點
(B)作$\angle FAB$角平分線與$\angle ABC$角平分線的交點
(C)取$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$三邊中點M、N、L，作$\overline{MN}$中垂線與$\overline{ML}$中垂線的交點
(D)分別延長$\overline{AB}$與$\overline{CD}$交於P，分別延長$\overline{AB}$與$\overline{EF}$交於Q，作$\angle P$角平分線與$\angle Q$角平分線的交點

14. 如圖(二)，$\overline{BD}$ 為圓 O 的直徑，弦 $\overline{AC}$ 未過圓心 O，則下列哪一個敘述是正確的？【93 年第一次基測】



(A) O 是△PCD 的外心　　(B) O 是△APD 的外心

(C) O 是△ACD 的外心　　(D) O 是△BCP 的外心

15. △ABC 中，$\angle A=40°$，$\angle B=40°$，$\angle C=100°$。若 I 為△ABC 的內心，則下列有關△AIB、△AIC、△BIC 之面積關係的敘述何者正確?【93 年第二次基測】

(A) △AIC 的面積＝△BIC 的面積

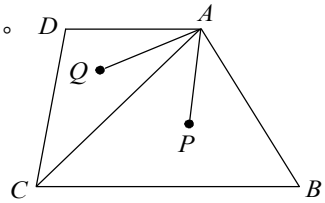
(B) △AIB 的面積＝△BIC 的面積

(C) △AIB 的面積＝△AIC 的面積

(D) △AIC 的面積 ＋△BIC 的面積＝△AIB 的面積

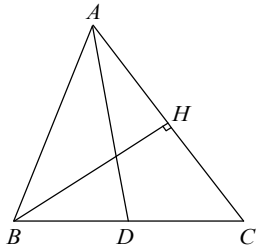
16. 如圖(一)，四邊形 ABCD 中，∠B = 60°、∠DCB = 80°、∠D = 100°。若 P、Q 兩點分別為△ABC 及△ACD 的內心，則∠PAQ =？

(A) 60°　(B) 70°　(C) 80°　(D) 90°　【94 年第一次基測】

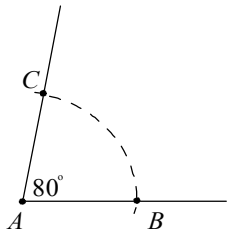


17. 如圖（十二），$\overline{AD}$ 是△ABC 的中線，H 點在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{BH}\perp\overline{AC}$。若 $\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AC}=14$，連接 $\overline{DH}$，則 $\overline{DH}$＝?

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　【94 年第二次基測】



18. 如右圖，有一$\angle A$及一直線L，其中$\angle A=80^\circ$，L上有一點O。

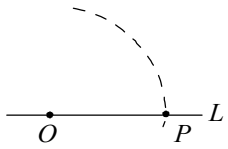


小敏想以O為頂點、L為角的一邊，作一角與$\angle A$相等。

已經進行的步驟如下：

(1) 以A為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交$\angle A$的兩邊於B、C兩點。

(2) 以O為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫弧，交L於P點。



請問小敏繼續下列哪一個步驟後，連接$\overline{OQ}$，$\angle QOP$即為所求？

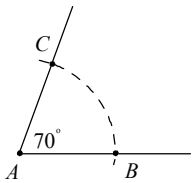
(A) 以O為圓心，$\overline{AC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點

(B) 以O為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點

(C) 以P為圓心，$\overline{AC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點

(D) 以P為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點　　【94 年第二次基測】

19. 如右圖，有一$\angle A$及一直線L，其中$\angle A=70^\circ$，L上有一點O。

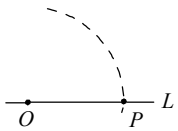


甲：以A為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交$\angle A$的兩邊於B、C兩點。

乙：以O為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫弧，交L於P點。

丙：以P為圓心，$\overline{AC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點。

丁：以P為圓心，$\overline{BC}$為半徑畫弧，與前弧相交於Q點。



戊：連接$\overline{OQ}$，可得$\angle QOP$。

若小名的作圖步驟為甲⇒乙⇒丙⇒戊，小芬的作圖步驟為甲⇒乙⇒丁⇒戊，

則有關於兩人所得的$\angle QOP$的敘述何者正確？【94 年第二次基測模擬試題】

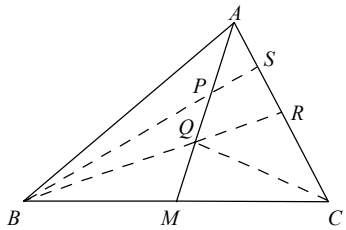
(A) 兩人所得的$\angle QOP$均為70°　　(B) 小名所得的$\angle QOP$為70°，小芬為60°

(C) 兩人所得的$\angle QOP$均為60°　　(D) 小名所得的$\angle QOP$為60°，小芬為70°

20. 如圖（六），$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{BC}>\overline{AC}$，$P$、$Q$兩點在$\overline{AM}$上，其中$\overline{AP}=\overline{PQ}$，且$Q$為$\Delta ABC$的重心。若兩直線$BP$、$BQ$與$\overline{AC}$分別交於$S$、$R$兩點， 則下列關係何者正確？

（A）$\overline{AS}=\overline{SR}$　　（B）$\overline{AR}=\overline{RC}$

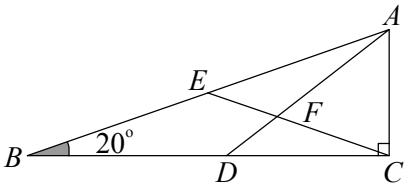
（C）$\overline{QB}=\overline{QC}$　　（D）$\overline{QR}=2\overline{PS}$　【95 年第一次基測】



圖（六）

21. 如圖(九)，$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，D在$\overline{BC}$上，E為$\overline{AB}$之中點，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$相交於F，且$\overline{AD}=\overline{DB}$。若$\angle B=20^{\circ}$，則$\angle DFE=$？【96 年第一次基測】

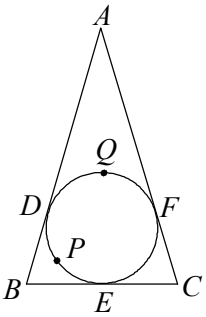
(A) 40°　(B) 50°　(C) 60°　(D) 70°



圖(九)

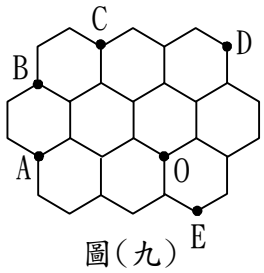
22. 如圖(十)，$\triangle ABC$的內切圓分別切$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$於D、E、F三點，其中P、Q兩點分別在$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{DF}$上。若$\angle A=30^{\circ}$，$\angle B=80^{\circ}$，$\angle C=70^{\circ}$，則$\overset{\frown}{DPE}$弧長與$\overset{\frown}{DQF}$弧長的比值為何？　【96 年第一次基測】

(A)$\frac{2}{3}$　(B)$\frac{8}{7}$　(C)$\frac{4}{3}$　(D)$\frac{8}{3}$



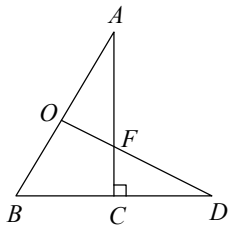
圖(十)

23. 圖（九）是 10 個相同的正六邊形緊密排列在同一平面上的情形。根據圖中各點的位置，判斷 O 點是下列哪一個三角形的外心？
（A）△ABD　（B）△BCD　（C）△ACD　（D）△ADE
【96 年第二次基測】

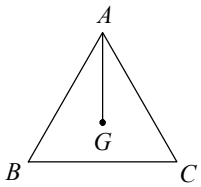


圖(九)

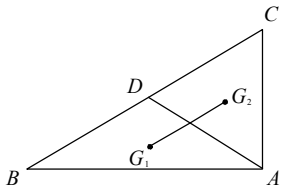
24. 如圖，$\overline{AC}$ 是 $\overline{BD}$ 的中垂線，O 為 $\overline{AB}$ 中點，若 $\overline{BD}=6$ 公分，$\overline{AB}=5$ 公分，則四邊形 BCFO 的面積是多少？
(A)4 平方公分　(B)5 平方公分　(C)6 平方公分　(D)7 平方公分



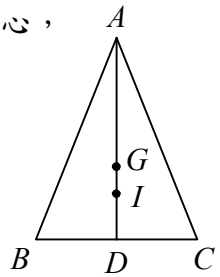
25. 如圖，正△ABC 的邊長為 3 公分，已知 G 為△ABC 的重心，則 $\overline{AG}=$？
(A)2 公分　(B)1 公分　(C)$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 公分　(D)$\sqrt{3}$ 公分



26. 如圖，△ABC 中，∠C＝90°，D 為 $\overline{AB}$ 上一點，G_1、G_2 分別為△BCD 與△ADC 之重心，$\overline{AC}=9$，$\overline{BC}=12$，則 $\overline{G_1G_2}=$？
(A)12　(B)9　(C)5　(D)3



27. △ABC 中，A 為（－2，6），B 為（1，7），C 為（5，5），求△ABC 的外心坐標未多少？
(A)（1，3）　(B)（1，2）　(C)（2，1）　(D)（2，2）

28. 承上題，△ABC 外接圓的面積為何？
(A) 25π　(B) 26π　(C) 27π　(D) 27π

29. 如圖，等腰△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$、$\overline{BD}=\overline{CD}=5$，若 G 為△ABC 的重心，I 為△ABC 的內心，則 $\overline{IG}$ 的長為多少？
(A) $\frac{10}{3}$　(B) 2　(C) $\frac{5}{3}$　(D) $\frac{2}{3}$